TD17 : Interférences - corrigé

Application 1

Il y a interférences entre l'onde qui se propage directement de S vers M (numérotée 1) et celle qui se réfléchit d'abord sur la paroi avant d'atteindre le microphone (numérotée 2). On calcule la différence de marche en ajoutant $\frac{\lambda}{2}$ au chemin parcouru par l'onde 2 pour tenir compte de la réflexion :

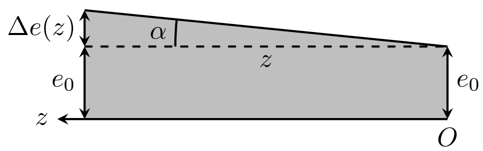
$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = \left(SM + MO + \frac{\lambda}{2} + OM\right) - SM = 2x + \frac{\lambda}{2}$$

L'intensité acoustique s'annule lorsque les interférences sont destructives :

$$\delta(M) = 2x + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}\ [\lambda] \iff x = 0\ \left[\frac{\lambda}{2}\right]$$

Le modulo indique la période spatiale pour l'annulation de l'intensité acoustique : $\boxed{i = \lambda/2}$. Ce résultat était attendu car la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie donne naissance à une **onde stationnaire**. Les points d'annulation de l'intensité acoustique correspondent aux nœuds de vibration. On a montré au chapitre précédent qu'ils sont distants les uns des autres de $\lambda/2$ (taille d'un fuseau).

Application 2



1. On représente schématiquement la situation, en posant $e(z) = e_0 + \Delta e(z)$. On peut écrire : $\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{\Delta e(z)}{z} \iff \Delta e(z) = \alpha z$.

On conclut que $\boxed{e(z) = e_0 + \alpha z}$.

2. On utilise l'expression de la différence de marche obtenue dans l'exercice précédent :

$$\delta = 2ne(z) - \frac{\lambda}{2} = 2n\alpha z + 2ne_0 - \frac{\lambda}{2}$$

On détermine les positions des franges sombres (intensité nulle, c'est-à-dire interférences destructives) :

$$\delta = 2n\alpha z + 2ne_0 - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}\ [\lambda] \iff z = \frac{\lambda}{2n\alpha} - \frac{e_0}{\alpha}\ \left[\frac{\lambda}{2n\alpha}\right]$$

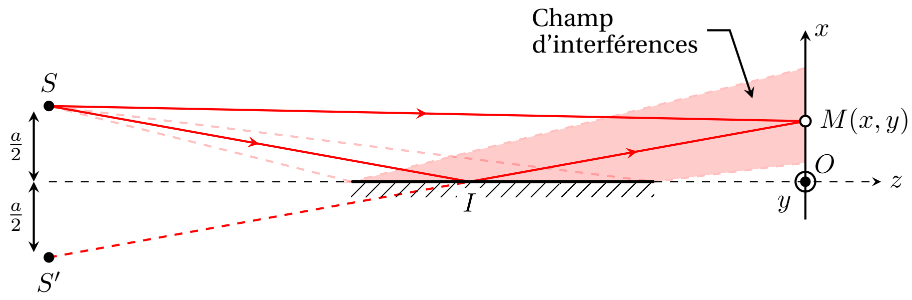
Le modulo indique la période spatiale des franges sombres : $\boxed{i = \frac{\lambda}{2n\alpha}}$.

3. l'application numérique donne : $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{2ni} = 0,31'}$.

4. Le résultat de la question 2 indique que l'interfrange est inversement proportionnel à l'angle d'ouverture du film. Cela signifie que plus les faces du film de savon sont inclinées l'une par rapport à l'autre et plus l'interfrange est faible. On constate sur l'image de la figure 6 que l'interfrange est plus petit au pied du film de savon qu'au sommet. Cela signifie que les directions des faces du film sont plus écartées au pied du film et plus proches au sommet. **Le profil 1 est celui qui correspond le mieux aux observations**.

Application 3

1. On observe des interférences entre l'onde qui se propage directement vers l'écran et celle qui se réfléchit d'abord sur le miroir (montage à division du front d'onde). Les frontières du champ d'interférences sont données par les rayons qui se réfléchissent sur les bords du miroir.



2. L'image S' est le symétrique de S par rapport au plan du miroir (voir figure ci-dessus). D'un point de vue géométrique tout se passe comme si le rayon réfléchi était issu de S' (on l'appelle *source secondaire*). Le montage est donc équivalent à celui des trous d'Young, avec deux sources ponctuelles **distantes de** a. D'un point de vue optique il y a cependant une petite différence avec les trous d'Young puisqu'il faut ici tenir compte du déphasage produit par la réflexion sur le miroir.

3. La différence de marche vaut : $\delta(M) = \left[S'M + \frac{\lambda}{2}\right] - SM$. La différence des chemins parcourus vaut $S'M - SM = \frac{ax}{D}$ (voir la démonstration faite pour les trous d'Young). On conclut que :

$$\boxed{\delta(M) = \frac{ax}{D} + \frac{\lambda}{2}}$$

On détermine les positions des franges claires :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} + \frac{\lambda}{2} = 0\ \left[\frac{\lambda}{2}\right] \iff x = -\frac{\lambda D}{2a}\ \left[\frac{\lambda D}{a}\right]$$

Le modulo correspond à l'interfrange : $\boxed{i = \frac{\lambda D}{a} = 0,40\ \text{mm}}$.

4. On détermine l'intensité lumineuse avec la formule de Fresnel :

$$I(M) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D} + \pi\right)\right] \iff \boxed{I(M) = 2I_0\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right)\right]}$$

Application 4

1. Le véhicule avance à la vitesse constante v et se trouve en $x = 0$ à la date $t = 0$: $\boxed{x_v(t) = vt}$.

2. Le véhicule se trouve en $x_v(t')$ à l'instant où l'onde se réfléchit. Entre t' et t l'écho se propage à la vitesse c entre le véhicule et le radar situé en $x = 0$. Par conséquent on peut écrire :

$$c(t-t') = x_v(t') = vt' \iff \boxed{t' = \frac{t}{1+\frac{v}{c}}} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t') = \frac{vt}{1+\frac{v}{c}}}$$

3. Si l'on tenait compte **uniquement du retard dû à la propagation**, l'écho reçu par le radar s'écrirait sous la forme :

$$s_r(O,t) = s_i(O,t-\tau) = A\cos(\omega_1(t-\tau))$$

avec τ la durée de l'aller-retour. Ici il faut ajouter un déphasage de π causé par la réflexion :

$$s_r(O,t) = A\cos(\omega_1(t-\tau)+\pi) = -A\cos(\omega_1(t-\tau))$$

Sachant que l'onde se réfléchit en $x_v(t')$, le retard temporel vaut : $\tau = \frac{2x_v(t')}{c} = \frac{\frac{2v}{c}}{1+\frac{v}{c}}t$. On obtient alors :

$$s_r(O,t) = -A\cos\left(\left(1-\frac{\frac{2v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)\omega_1 t\right) \iff \boxed{s_r(O,t) = -A\cos\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\omega_1 t\right)}$$

4. On peut écrire au premier ordre :

$$\omega_2 = \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\omega_1 \simeq \left(1-\frac{v}{c}\right)^2\omega_1 \simeq \left(1-\frac{2v}{c}\right)\omega_1$$

On trouve alors que le décalage en fréquence vaut : $\boxed{\Delta f = \frac{2v}{c}f_1}$.

5. La fréquence des battements s'identifie au décalage Δf entre l'onde incidente et l'écho. On trouve alors :

$$\boxed{v = \frac{cf_{\text{batt}}}{2f_1} = 112\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$$

⋆ Exercice 1 : Interférences sur une cuve à onde

1. L'axe (Ox) est la **médiatrice** du segment $[S_1S_2]$, par conséquent $S_1M = S_2M$ donc $\delta(M) = 0$. Les interférences sont **constructives**.

2. Soit y l'ordonnée d'un point de l'axe (Oy) situé au-dessus de S_1. Alors :

$$\delta = S_2M - S_1M = (y+\frac{a}{2}) - (y-\frac{a}{2}) = a$$

L'amplitude de vibration est nulle, ce qui signifie que les interférences sont destructives, donc que **l'ordre d'interférences** $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}$ **est un demi-entier**.

3. Soit y l'ordonnée d'un point de l'axe (Oy) situé entre S_1 et S_2. Alors $\delta = (\frac{a}{2}+y) - (\frac{a}{2}-y) = 2y$. D'après la formule de Fresnel :

$$\boxed{I(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{4\pi y}{\lambda}\right)\right]}$$

Les franges claires correspondent à des maxima de l'intensité lumineuse, c'est-à-dire :

$$\frac{4\pi y}{\lambda} = 0\ [2\pi] \iff y = 0\ \left[\frac{\lambda}{2}\right]$$

L'interfrange vaut : $\boxed{i = \lambda/2}$.

4. (*erreur dans l'énoncé : on observe **neuf** maxima d'intensité vibratoire entre les sources*). Cette information nous permet de comprendre que les deux sources sont séparés par **neuf interfranges**, donc :

$$S_1S_2 = a = 9i = 9\frac{\lambda}{2} \iff \boxed{\frac{a}{\lambda} = \frac{9}{2}}$$

Cette valeur est bien demi-entière.

⋆ Exercice 2 : Montage des trous d'Young

1. et 2. Voir démo du cours.

3. $\boxed{i = \frac{\lambda D}{a} = 0,9\,\text{mm}}$.

4. La lumière se propage plus lentement dans le verre que dans l'air ($v = \frac{c}{n}$ avec n l'indice du verre). Par conséquent le temps de propagation de la lumière sur le chemin SS_2 est plus long que sur le chemin SS_1, ce qui signifie que $(SS_2) > (SS_1)$. On peut donc écrire la différence de marche sous la forme suivante :

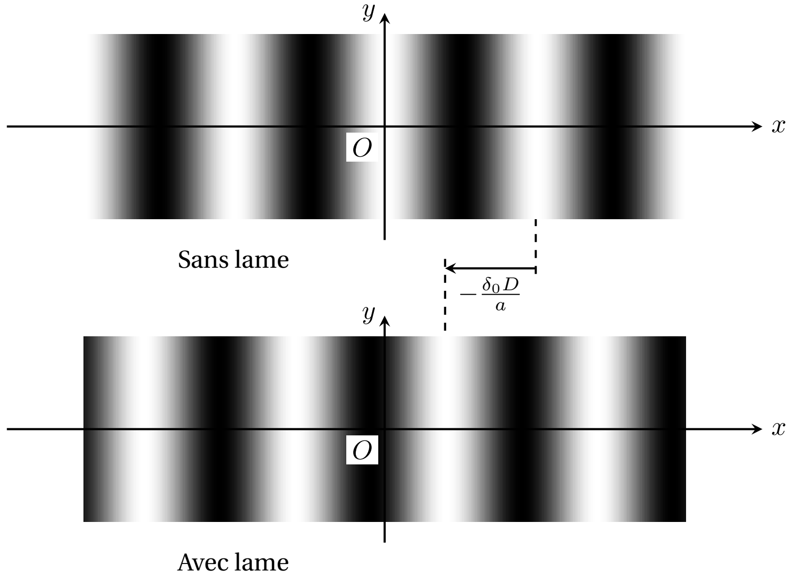
$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SM)_2 - (SM)_1 \\ &= [(SS_2)+(S_2M)] - [(SS_1)+(S_1M)] \\ &= \underbrace{(S_2M)-(S_1M)}_{\frac{ax}{D}} + \underbrace{(SS_2)-(SS_1)}_{\delta_0} \\ &= \frac{ax}{D} + \delta_0\end{aligned}$$

On note ici δ_0 la différence de marche supplémentaire causée par la présence de la lame de verre. Cette quantité ne dépend pas de la position du point M puisque la lame est située avant les trous, donc δ_0 est une constante qui ne dépend ni de x, ni de y. Voyons ce que cela cause comme effet sur la figure d'interférences :

- $\delta(M)$ ne dépend pas de y donc **les franges sont toujours des droites parallèles à l'axe** (Oy).
- Les positions des franges claires (interférences constructives) sont données par :

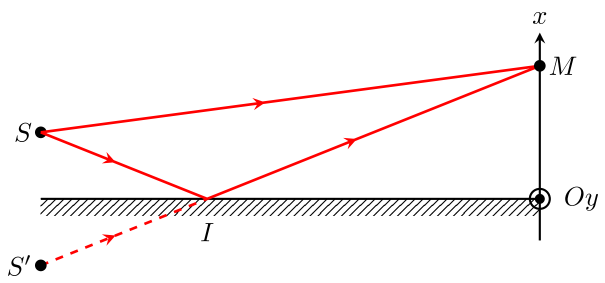
$$\frac{ax}{D} + \delta_0 = 0\ [\lambda] \iff x = -\frac{\delta_0 D}{a}\ \left[\frac{\lambda D}{a}\right]$$

On a vu en cours qu'en l'absence de lame, ces positions sont : $x = 0\ \left[\frac{\lambda D}{a}\right]$. On conclut que **l'interfrange reste le même** ($i = \frac{\lambda D}{a}$) mais les franges sont **translatées de** $-\frac{\delta_0 D}{a}$ **sur l'axe** (Ox).



⋆ Exercice 3 : Miroir de Lloyd

1.



On note S' l'image de S par le miroir plan. Celle-ci est symétrique de S par rapport au miroir, donc les distance SI et $S'I$ sont égales. Par conséquent, tout se passe comme si le rayon se réfléchissant sur le miroir était issu de S'. On peut interpréter la figure d'interférences observée sur l'écran comme si elle était produite par les deux sources S et S'.

Rq 1 : Il faudra tout de même tenir compte de la différence de marche supplémentaire de $\lambda/2$ due à la réflexion sur le miroir.

Rq 2 : Ces deux sources S et S' n'en sont en fait qu'une seule puisque tous les rayons sont véritablement issus de S. On peut donc conclure qu'il y aura bien interférences entre ces rayons et qu'il n'y a pas de déphasage initial entre les sources.

2. Le calcul de la différence de marche est presque identique à celui vu en cours pour les trous d'Young, avec une distance entre les sources égale à $2h$. Il faut simplement rajouter $\lambda/2$ au chemin optique (SIM) à cause de la réflexion sur le miroir plan. On obtient donc :

$$\boxed{\delta(x,y) = \frac{2hx}{D} + \frac{\lambda}{2}}$$

L'intensité lumineuse vaut alors :

$$I(x,y) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{2hx}{D} + \frac{\lambda}{2}\right)\right)\right] = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi hx}{\lambda D} + \pi\right)\right]$$

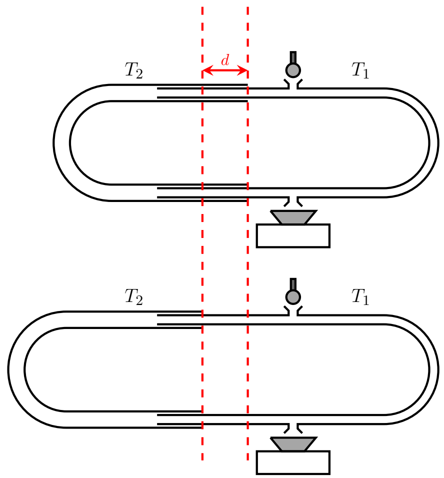
ce qui donne après simplification :

$$\boxed{I(x,y) = 2I_0\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi hx}{\lambda D}\right)\right]}$$

L'intensité lumineuse est nulle en O (les interférences y sont destructives). L'interfrange vaut :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{2h}}$$

⋆ Exercice 4 : Trombone de Koenig



Dans la première expérience, les interférences entre les ondes acoustiques qui circulent dans les deux bras du trombone sont destructives au niveau du microphone (amplitude minimale). On note p_1 l'ordre d'interférences, au niveau du détecteur, pour cette première expérience. Il est égal à un demi-entier.

Dans la deuxième expérience les interférences sont à nouveau destructives. L'ordre d'interférences p_2 est encore un demi-entier. On en déduit que $p_2 - p_1$ est un entier.

Entre les deux expériences on passe d'un minimum d'intensité au suivant, donc $p_2 - p_1 = 1$ (l'ordre d'interférences passe d'un demi-entier au demi-entier suivant).

C'est le déplacement du bras gauche du trombone qui modifie la différence de marche. Tandis que la distance parcourue dans le bras T_1 est fixe, la distance parcourue dans le bras T_2 augmente de $2d$ (car l'onde fait un aller-retour dans ce bras). On peut donc écrire que :

$$\delta_2 = \delta_1 + 2d \iff p_2 - p_1 = \frac{2d}{\lambda} = 1 \iff \lambda = 2d$$

Connaissant la fréquence de l'onde acoustique on en déduit la célérité :

$$\boxed{c = \lambda f = 2df = 345\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

⋆ Exercice 5 : Diapasons

1. L'enregistrement du son produit par les deux diapasons montre visiblement la présence de **battements** puisque l'amplitude sonore est modulée **dans le temps**. On conclut que les deux diapasons vibrent à des fréquences différentes, donc qu'au moins l'un des deux diapasons est désacordé.

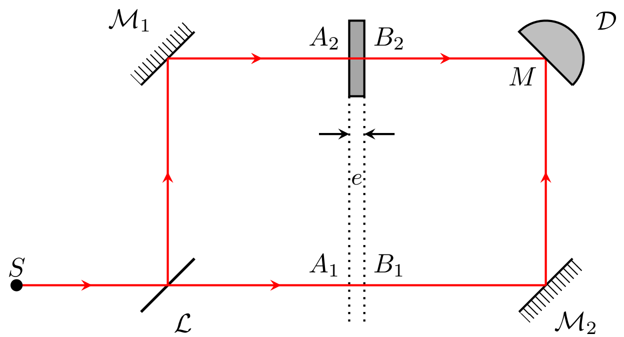
2. On suppose dans cette question que l'un des diapasons est juste (fréquence $f_0 = 264\,\mathrm{Hz}$). Pour déterminer la fréquence de l'autre diapason on mesure la période, puis la fréquence des battements : $T_{\text{batt}} = 3,8\,\mathrm{s} \implies f_{\text{batt}} = 0,26\,\mathrm{Hz}$. La fréquence des battements est égale à l'écart de fréquence entre les deux diapasons, donc l'écart relatif vaut :

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_{\text{batt}}}{f_0} = 0,1\,\%}$$

⋆ Exercice 6 : Interféromètre de Mach-Zender

1. En l'absence de lame de verre, les deux parcours sont identiques donc la différence de marche est nulle. Les interférences sont **constructives** au niveau du détecteur.

2. Quand on introduit la lame de verre les deux chemins restent identiques, sauf sur l'épaisseur e constituée d'un côté de verre ($A_2 \to B_2$) et de l'autre côté d'air ($A_1 \to B_1$). On représente schématiquement la situation :



On exprime la différence de marche :

$$\begin{aligned}\delta &= (SM)_2 - (SM)_1 \\ &= [(SA_2) + (A_2B_2) + (B_2M)] - [(SA_1) + (A_1B_1) + (B_1M)]\end{aligned}$$

Les chemins optiques $(SA_2) + (B_2M)$ et $(SA_1) + (B_1M)$, identiques, se compensent, donc :

$$\delta = (A_2B_2) - (A_1B_1) = ne - e \iff \boxed{\delta = (n-1)e}$$

3. La plus petite épaisseur pour laquelle l'amplitude est nulle au niveau du détecteur correspond au cas où $\delta = \frac{\lambda}{2}$. Dans ce cas :

$$\frac{\lambda}{2} = (n-1)e \iff \boxed{e = \frac{\lambda}{2(n-1)}}$$

AN : $\boxed{e = 532\,\mathrm{nm}}$.

4. On note n et n' l'indice de l'air dans les deux tubes. Par analogie avec la question 2 on trouve que la différence de marche au niveau du détecteur vaut : $\delta = n\ell - n'\ell = (n-n')\ell$. Quand les deux tubes sont remplis d'air, les indices sont identiques donc $\delta = 0 \implies p = 0$. À mesure que l'on fait le vide dans un tube, l'indice de réfraction de l'air diminue (on suppose ici qu'il s'agit de n'). L'ordre d'interférences vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{(n-n')\ell}{\lambda}$$

L'ordre d'interférences **augmente** quand on fait le vide. Or, à chaque fois que p prend une valeur entière l'intensité lumineuse est maximale au niveau du détecteur et quand elle est demi-entière l'intensité est nulle. En conlusion, à mesure que l'on fait le vide dans l'un des deux tubes, on voit l'intensité lumineuse mesurée par le détecteur passer successivement par des minima et des maxima. Entre deux maxima successifs, l'ordre d'interéfrence a varié d'une unité. Cette méthode permet de "compter" les variations de p avec le détecteur et donc de mesurer l'écart entre les deux indices de réfraction. Dans la limite d'un vide parfait, $n' = 1$ donc :

$$p = \frac{(n-1)\ell}{\lambda} \iff \boxed{n - 1 = p\frac{\lambda}{\ell} = 1,2\cdot 10^{-4}}$$