Chapitre 18 : Théorème du moment cinétique

1 Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

1.1 Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point A

1.1.1 Définition

On appelle **moment cinétique** d'un point matériel M de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $(\mathscr{R})$, par rapport à un point A quelconque de l'espace, le vecteur :

$$\boxed{\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}}$$

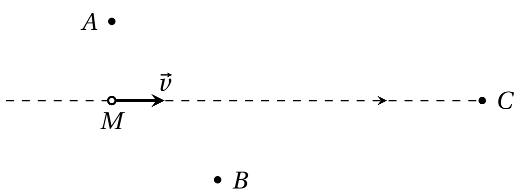
1.1.2 Propriétés, règle de la main droite

Le moment cinétique $\vec{L}_A(M)$ **est orthogonal au plan $(\overrightarrow{AM}, \vec{v})$**. Son sens est donné par **la règle de la main droite**. Avec votre main droite, tendez votre pouce et pliez les autres doigts **dans le sens de la rotation**. Votre pouce indique alors la direction et le sens du moment cinétique.

Remarque : Si la masse ne tourne pas autour de A alors le moment cinétique est nul.

1.1.3 Application

Déterminer la direction et le sens des moments cinétiques $\vec{L}_A(M)$, $\vec{L}_B(M)$ et $\vec{L}_C(M)$ sur la figure ci-dessous.

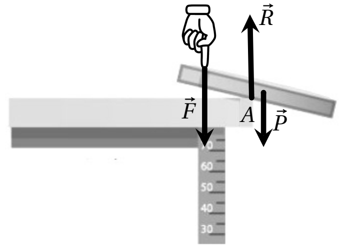


1.2 Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point A de l'espace

Soit $\vec{F}$ une force qui s'applique en un point M. On appelle **moment de la force $\vec{F}$** par rapport à un point A quelconque de l'espace, le vecteur :

$$\boxed{\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$$

Le moment $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ permet de quantifier la contribution d'une action mécanique au mouvement de **rotation d'un système autour du point** A.



Application : à vous de trouver, à l'aide de la règle de la main droite, la direction et le sens du moment par rapport au point A, de chacune des trois forces qui s'exercent sur cette tartine beurrée en équilibre précaire!

1.3 Théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel M, par rapport à un point fixe A, dans un référentiel galiléen

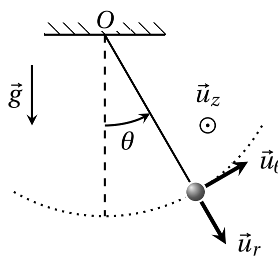
Soit M un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures, et A un point quelconque de l'espace, fixe dans un référentiel $(\mathscr{R})$ galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport au point A, dans le référentiel $(\mathscr{R})$, s'énonce de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)}$$

1.4 Application : pendule simple

En appliquant le TMC par rapport au point O on retrouve l'équation du mouvement déjà établie avec le PFD :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$



Le théorème du moment cinétique est bien adaptée à ce mouvement circulaire autour du point O. Cette situation illustre qu'en mécanique, il existe souvent plusieurs moyens d'étudier un même mouvement (PFD, TMC, théorème énergétique).

1.5 Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique se conserve lorsque la résultante des moments de force est nulle. On peut alors écrire une **intégrale première du mouvement** (voir exercice 3 du TD).

2 TMC par rapport à un axe orienté fixe

2.1 Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté

Soit M un point matériel de masse m en mouvement à la vitesse $\vec{v}$, (Δ) un axe orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et A un point **quelconque** appartenant à (Δ). Le moment cinétique cinétique de M par rapport à (Δ) est **la projection sur $\vec{u}_\Delta$ du moment cinétique vectoriel $\vec{L}_A(M)$** :

$$\boxed{L_\Delta(M) = (\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta}$$

<u>À retenir</u> : Le moment cinétique $\vec{L}_A(M)$ mesuré par rapport à un **point** est un **vecteur**. Le moment cinétique $L_\Delta(M)$ mesuré par rapport à un **axe orienté** est un **scalaire.**

Le signe d'un moment cinétique scalaire est relié au sens de rotation. On peut à nouveau utiliser là règle de la main droite pour déterminer ce signe :

- Si le pouce est dirigé dans le sens de (Δ) alors $L_\Delta(M) > 0$.
- Si le pouce est dirigé dans le sens contraire de (Δ) alors $L_\Delta(M) < 0$.
- Si M ne tourne pas autour de (Δ) alors $L_\Delta(M) = 0$.

<u>Application</u> : Sur la figure ci-dessous déterminer sur laquelle des deux figures le moment cinétique scalaire $L_\Delta(M)$ est positif.

2.2 Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté - bras de levier

Soit $\vec{F}$ une force qui s'applique en un point M de l'espace, (Δ) un axe orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et A un point **quelconque** appartenant à (Δ). Le moment de $\vec{F}$ par rapport à (Δ) est **la projection sur $\vec{u}_\Delta$ du moment vectoriel $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$** :

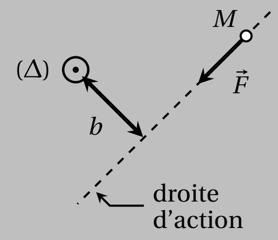
$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta}$$

Dans le cas très fréquent où la force $\vec{F}$ est orthogonale à (Δ), il existe une façon pratique pour calculer le moment de force scalaire, appelée *méthode du bras de levier*.

Soit $\vec{F}$ une force orthogonale à (Δ) qui s'applique en un point M. La droite passant par M et dirigée selon $\vec{F}$ est appelée **droite d'action de** $\vec{F}$.

On appelle **bras de levier** de $\vec{F}$ la distance b entre la droite d'action de $\vec{F}$ et (Δ).

Le moment de force scalaire $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ s'écrit de la manière suivante :

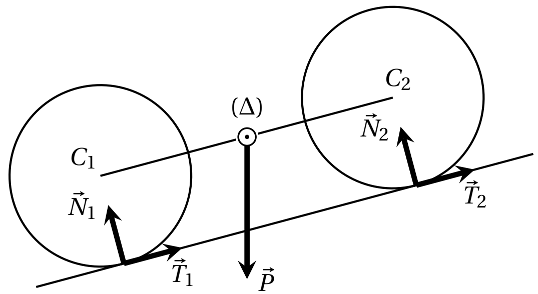


$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm b\|\vec{F}\|}$$

avec un signe $\pm$ qui est donné par la règle de la main droite.

<u>Application</u> : Voici une modélisation rudimentaire d'un vélo posé sur une route inclinée. Chaque roue a un rayon R. Les centres des deux roues sont distants de $C_1C_2 = 4R$. Le centre d'inertie du vélo se trouve au centre du segment $[C_1C_2]$. Le vélo est soumis à son poids et à la réaction du sol (composante normale et tangentielle) qui s'applique à chacune des roues, au niveau du point de contact avec le sol.

Exprimer le moment de chacune de ces forces par rapport à l'axe (Δ) passant par le centre d'inertie.



2.3 TMC appliqué à un point matériel M par rapport à un axe orienté (Δ) fixe dans un référentiel galiléen

Soit M un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures et (Δ) un axe orienté fixe dans un référentiel $(\mathscr{R})$ galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport à (Δ), dans le référentiel $(\mathscr{R})$, s'énonce de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})}$$