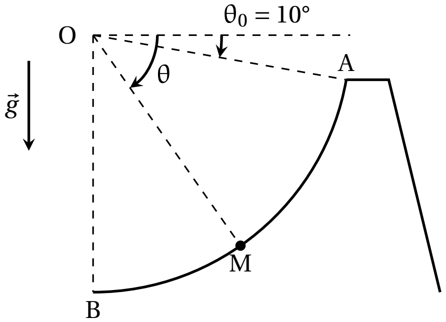
TD18 : TMC

⋆ Exercice 1 : Le toboggan

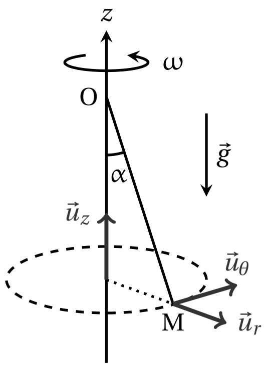
Un enfant, que l'on assimile à un point matériel M de masse $m = 40$ kg, glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5$ m. L'enfant, initialement en A avec une vitesse nulle, se laisse glisser et atteint le point B avec une vitesse V_B. On supposera le référentiel terrestre galiléen et les frottements négligeables.



1. À l'aide du TMC, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. Exprimer la vitesse de l'enfant en fonction de θ. En déduire la valeur de V_B.

⋆ Exercice 2 : Pendule conique

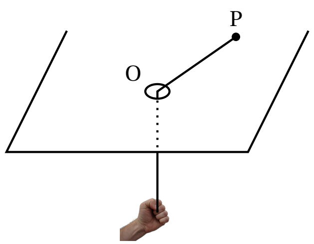
Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible sans masse de longueur ℓ attaché en un point O, fixe dans un référentiel galiléen. M se déplace sur une trajectoire circulaire dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante ω. La direction du fil fait un angle α avec la verticale.



1. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ dans la base cylindrique. En déduire une expression de $\dfrac{d\vec{L}_O(M)}{dt}$.
2. En appliquant le TMC, exprimer α en fonction de ω, ℓ et g.

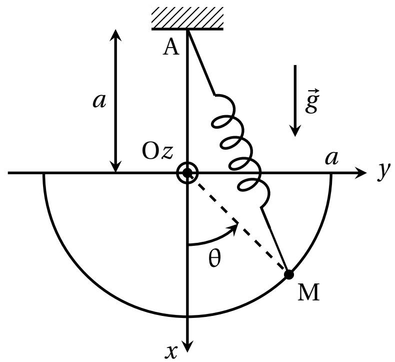
⋆⋆ Exercice 3 : Mouvement d'une masse attachée à un fil

Un point matériel P de masse m se déplace sans frottement sur un plan horizontal percé d'un trou en O. P est attaché à un fil sans masse inextensible. Un opérateur tire le fil de manière à ce que $OP(t) = \ell(t) = a - bt$ où a et b sont deux constantes positives. On lance la masse depuis $\theta_0 = 0$ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0 = \omega_0$.



1. En appliquant le TMC, trouver l'expression de $\dot{\theta}(t)$.
2. Donner l'expression de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur P en fonction de $\ell(t)$.
3. En admettant que la force exercée par l'opérateur pour tirer le fil est de même norme que $\vec{T}$, calculer le travail fourni au système entre $t = 0$ et une date t quelconque.

⋆⋆ Exercice 4 : Pendule à ressort



Un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur un rail circulaire de rayon a situé dans un plan vertical. Il est lié à un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, attaché au point fixe A, situé à une distance a au-dessus du centre O du rail.

Dans tout l'exercice, on suppose que $\ell_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ et on pose $\frac{g}{a} = \frac{k}{2m} = \omega^2$.

1. Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) et montrer que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :
$$\ddot{\theta} + \omega^2\left(\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\right) = 0$$
2. Déterminer les positions d'équilibre sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. On pose $\varepsilon = \theta - \theta_{eq}$. Déterminer une forme approchée de l'équation du mouvement autour de chacune des positions d'équilibre. S'agit-il de positions stables ? Si oui, donner l'expression de la pulsation propre des petites oscillations.

   Indication : On donne le développement suivant à l'ordre 1 (pour $\varepsilon \ll 1$) :
$$\sin(\theta_{eq} + \varepsilon) \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq}$$

Solutions :

Ex1 : 1. $\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0$ 2. $v = \sqrt{2gr(\sin\theta - \sin\theta_0)}$ $v_B = \sqrt{2gr(1-\sin\theta_0)}$ AN: $v_B = 6,4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Ex2 : 1. $\vec{L}_O(M) = m\ell^2\omega\sin\alpha(\sin\alpha\vec{u}_z + \cos\alpha\vec{u}_r)$ $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = m\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{u}_\theta$
2. $\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$

Ex3 : 1. $\dot{\theta} = \frac{a^2\omega_0}{\ell^2(t)}$ 2. $\vec{T} = -\frac{ma^4\omega_0^2}{\ell^3(t)}\vec{u}_r$ 3. $W = \frac{ma^4\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{a^2}\right)$

Ex4 : 2. $\theta_{eq1} = 0$ $\theta_{eq2} = \frac{\pi}{3}$ 3. $\theta_{eq1} : \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}\,\omega$ $\theta_{eq2} : \omega_0 = \frac{\omega}{2}$