CHAPITRE 18 Théorème du moment cinétique

On a vu précédemment comment se servir du principe fondamental de la dynamique pour étudier le mouvement de translation d'un corps. Ce chapitre introduit un nouveau formalisme, adapté à l'étude du mouvement de rotation autour d'un point ou d'un axe. Il repose sur un dérivé du PFD, appelé *théorème du moment cinétique* (ou TMC). Formellement ces deux théorèmes sont semblables puisqu'ils permettent de déterminer la trajectoire d'un corps à partir des forces extérieures qui s'exercent sur lui. L'un utilise des grandeurs plus adaptées aux mouvements de translation, et l'autre aux mouvements de rotation. Le tableau ci-dessous résume les analogies entre ces deux formalismes.

	Inertie	Cinématique	Actions extérieures	Dynamique
Translation	Masse	Quantité de mouvement	Forces	Principe fondamental de la dynamique
Rotation	Moment d'inertie	Moment cinétique	Moments de force	Théorème du moment cinétique

Dans ce chapitre on montre comment appliquer le théorème du moment cinétique sur quelques exemples simples, sachant qu'il se décline en deux versions différentes, l'une adaptée aux mouvements de rotation autour d'un point fixe et l'autre aux mouvements de rotation autour d'un axe fixe. On traite ces deux versions dans deux parties séparées. Pour l'instant on se limite à l'étude du mouvements de masses ponctuelles. On abordera le cas des solides dans le chapitre 20.

1 Théorème du moment cinétique appliqué à une masse ponctuelle, par rapport à un point fixe

1.1 Moment cinétique d'une masse ponctuelle par rapport à un point A

1.1.1 Définition

Moment cinétique d'une masse ponctuelle par rapport à un point A

On considère un point A quelconque de l'espace et un point matériel M de masse m qui, à un instant donné, possède une vitesse $\vec{v}$. On appelle *moment cinétique de M par rapport au point A* le vecteur :

$$\boxed{\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}}$$

1.1.2 Cas d'un mouvement plan, règle de la main droite

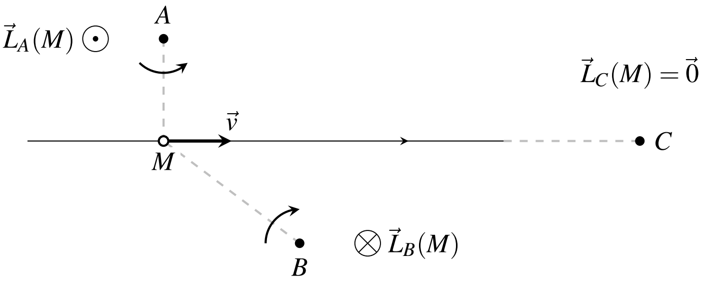
Le moment cinétique se calcule avec un produit vectoriel, dont on a rappelé les propriétés au chapitre 11. Il existe une règle simple qui permet de déterminer la direction et le sens du moment cinétique, dans le cas fréquent où le mouvement de la masse ponctuelle est plan.

Règle de la main droite

On considère une masse ponctuelle en rotation plane autour d'un point A. Avec votre **main droite**, tendez votre pouce et pliez les autres doigts **dans le sens de la rotation**. Votre pouce indique alors la direction et le sens du moment cinétique.

On note que le moment cinétique est toujours **orthogonal au plan du mouvement**. C'est en fait une conséquence directe des propriétés du produit vectoriel (le moment cinétique $\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}$ est orthogonal au plan $(\overrightarrow{AM}, \vec{v})$).

On illustre cette règle avec la figure ci-dessous. Un point matériel M est en mouvement rectiligne et les trois points A, B et C sont fixes. La notion de rotation n'est pas liée au caractère courbé de la trajectoire. Ce qui compte est de savoir dans quel sens *tourne la direction de M, mesurée par rapport à l'un des points fixes*. Sur l'exemple ci-dessous le déplacement de la masse fait tourner la direction (AM) dans le sens anti-horaire et la direction (BM) dans le sens horaire. La règle de la main droite permet alors de déterminer le sens du moment cinétique.



Le moment cinétique $\vec{L}_C(M)$ est nul car M se déplace dans la direction de C (il ne tourne pas autour de C). On peut le justifier en disant que $\overrightarrow{CM}$ est colinéaire à $\vec{v}$ donc $\vec{L}_C(M) = \overrightarrow{CM} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$.

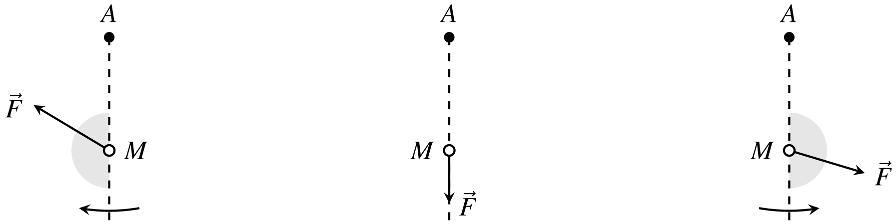
1.2 Moment d'une force par rapport à un point A

Moment d'une force par rapport à un point A

On considère un point A quelconque de l'espace et un point matériel M qui subit une force $\vec{F}$. On appelle *moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A* le vecteur :

$$\boxed{\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$$

Le moment de force $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ permet de mesurer l'influence de $\vec{F}$ sur un éventuel mouvement de rotation du corps autour de A. On peut utiliser une variante de la règle de la main droite pour déterminer la direction et le sens de $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$: il faut pour cela plier les doigts de la main droite dans le sens vers lequel la force **tend à faire tourner M autour de** A. Le pouce indique alors la direction et le sens de $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$. On illustre la méthode ci-dessous.



$\otimes\ \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ $\qquad$ $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F}) = \vec{0}$ $\qquad$ $\odot\ \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$

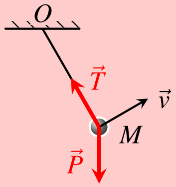
Sur la figure de gauche la force tend à faire tourner la direction (AM) dans le sens horaire donc $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ est sortant. Sur la figure de droite c'est le contraire, la force tend à faire tourner la direction (AM) dans le sens anti-horaire donc $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ est entrant.

> **Le moment $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ est nul si $\vec{F}$ est dans la direction de** A (elle ne tend à faire tourner la masse ni dans un sens ni dans l'autre, voir figure du milieu). On peut le justifier en disant que $\vec{F}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AM}$ donc $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

Remarque : Le moment $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$ est nul **si le point d'application M est confondu avec** A ($\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$). On rencontrera ce cas de figure de temps en temps.

Application 1

Déterminer, pour le pendule ci-contre, le sens du moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ ainsi que ceux du poids $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P})$ et de la tension du fil $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{T})$.



1.3 Théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel M, par rapport à un point fixe A

Moment d'une force par rapport à un point A

On se place dans un référentiel $\mathscr{R}$ **galiléen** et on considère un point A **fixe** dans $\mathscr{R}$. Le système est un point matériel M soumis à différentes forces extérieures. Le théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport au point A, s'énonce ainsi :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})}$$

En général on utilise le théorème du moment cinétique pour obtenir l'équation du mouvement. La méthode est semblable à celle utilisée pour mettre en œuvre le principe fondamental de la dynamique.

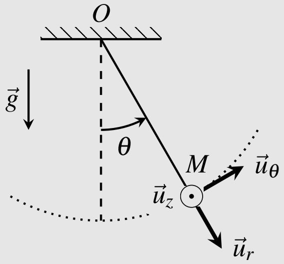
En résumé

- Définir le système ;
- Indiquer le référentiel (il doit être galiléen) ;
- Préciser le repère d'étude (un schéma est nécessaire) ;
- Faire l'inventaire des forces (il est conseillé de les représenter sur le schéma en prévision des calculs de projection) ;
- Énoncer le TMC (vectoriel), **en précisant par rapport à quel point on l'applique**.
- Projeter dans la base d'étude pour obtenir l'équation du mouvement.

Exemple

On accroche une masse ponctuelle m à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ. L'autre extrémité est fixée à un point d'attache O immobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige tout frottement.

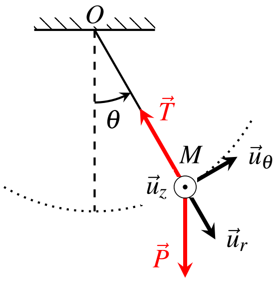
Établir l'équation du mouvement du pendule en appliquant le théorème du moment cinétique.



► **Mettre en œuvre le TMC par rapport à un point fixe**

On étudie le mouvement de la masse ponctuelle M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottements celle-ci est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

On applique le théorème du moment cinétique à la masse M, par rapport au point fixe O :



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

On calcule le moment cinétique :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = m\ell\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

Le moment de la tension du fil est nul car $\vec{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$: $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$. On calcule le moment du poids :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell\vec{u}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) = -mg\ell\sin\theta\vec{u}_z$$

On projette enfin le TMC sur $\vec{u}_z$:

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Application 2

On reprend l'exercice précédent en tenant compte cette fois-ci d'une force de frottement fluide linéaire $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Établir l'équation du mouvement avec le théorème du moment cinétique, la simplifier dans l'approximation des mouvements de petite amplitude, puis identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

2 Théorème du moment cinétique appliqué à une masse ponctuelle, par rapport à un axe orienté fixe

2.1 Moment cinétique d'une masse ponctuelle par rapport à un axe orienté (Δ)

Moment cinétique d'une masse ponctuelle par rapport à un axe orienté (Δ)

On considère un axe (Δ) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et un point A quelconque appartenant à cet axe. Un point matériel M de masse m en mouvement possède, à un instant donné, une vitesse $\vec{v}$. On appelle *moment cinétique de M par rapport à (Δ)* **la projection sur $\vec{u}_\Delta$ du moment cinétique $\vec{L}_A(M)$** :

$$\boxed{L_\Delta(M) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{u}_\Delta}$$

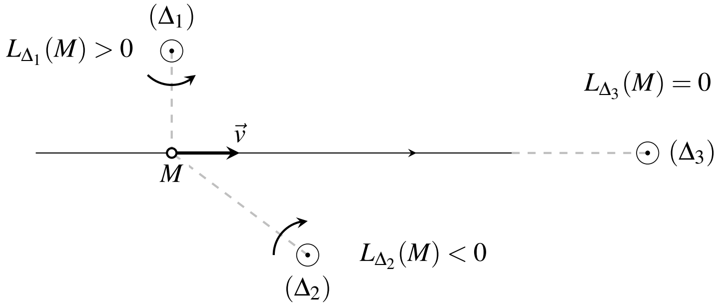
> Le moment cinétique $L_\Delta(M)$ mesuré par rapport à un axe orienté s'obtient par projection, il s'agit donc **d'un scalaire**, contrairement au moment cinétique $\vec{L}_A(M)$ mesuré par rapport à un point, qui est un vecteur.

Remarque : Le moment $L_\Delta(M)$ ne dépend pas du point choisi sur l'axe. Le point A appartenant à (Δ) peut donc être choisi arbitrairement.

On traitera essentiellement des situations dans lesquelles le mouvement se situe dans un plan orthogonal à (Δ). Dans ce cas on peut utiliser la règle de la main droite pour relier le signe de $L_\Delta(M)$ au sens de rotation. Tendez le pouce et pliez les autres doigts dans le sens de la rotation :

- si le pouce est orienté dans le même sens que (Δ) alors $L_\Delta(M) > 0$;
- si le pouce est orienté dans le sens opposé à (Δ) alors $L_\Delta(M) < 0$;
- si M ne tourne pas autour de (Δ) alors $L_\Delta(M) = 0$.

On reprend l'exemple de la partie précédente et on note respectivement (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) les axe orientés passant par A, B et C. On choisi arbitrairement d'orienter ces axes dans le sens entrant.



2.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté (Δ)

2.2.1 Définition

Moment d'une force par rapport à un axe orienté (Δ)

On considère un axe (Δ) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et un point A quelconque appartenant à cet axe. Un point matériel M subit une force $\vec{F}$. On appelle *moment de $\vec{F}$ par rapport à* (Δ) **la projection sur $\vec{u}_\Delta$ du moment de force $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$** :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_\Delta}$$

Remarque : Comme pour le moment cinétique, le point A appartenant à (Δ) peut être choisi arbitrairement.

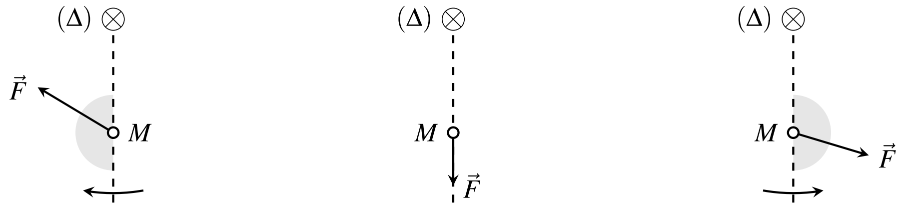
Il est très important de retenir que tout moment mesuré par rapport à un point est un vecteur tandis que tout moment mesuré par rapport à un axe orienté est un scalaire.

Moment	par rapport à un point A	par rapport à un axe orienté (Δ)
cinétique	**vecteur** $\vec{L}_A(M)$	**scalaire** $L_\Delta(M)$
de force	**vecteur** $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F})$	**scalaire** $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F})$

Une fois encore la règle de la main droite permet d'anticiper le signe d'un moment de force scalaire. Tendez le pouce et pliez les autres doigts dans le sens vers lequel la force **tend à faire tourner** M **autour de l'axe** (Δ) :

- si le pouce est orienté dans le même sens que (Δ) alors $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) > 0$;
- si le pouce est orienté dans le sens opposé à (Δ) alors $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$;
- si la force ne tend pas à faire tourner M autour de (Δ) alors $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

On reprend l'exemple de la partie précédente, et cette fois-ci on choisit arbitrairement d'orienter l'axe (Δ) dans le sens sortant.



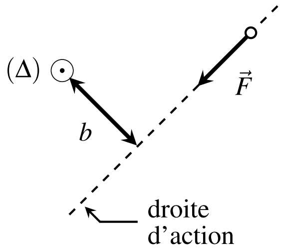
$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) > 0$ $\quad$ $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ $\quad$ $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$

2.2.2 Cas d'une force orthogonale à (Δ), bras de levier

Droite d'action d'une force, bras de levier

On considère un axe orienté (Δ) et une force $\vec{F}$ orthogonale à (Δ).

- On appelle *droite d'action* de $\vec{F}$ la droite qui passe par le point d'application et qui est orientée par $\vec{F}$.
- On appelle *bras de levier* de la force $\vec{F}$ par rapport à (Δ) (noté b) la distance entre la droite d'action de $\vec{F}$ et (Δ).



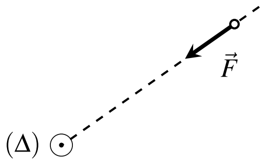
Calcul d'un moment de force scalaire avec le bras de levier

Si $\vec{F}$ est orthogonale à l'axe orienté (Δ) alors son moment par rapport à (Δ) vaut :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm b\|\vec{F}\|}$$

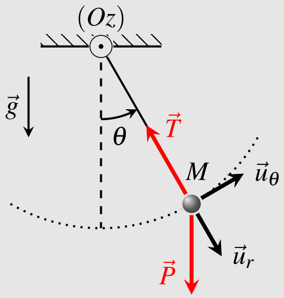
avec b le bras de levier. Pour déterminer le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ on utilisera la règle de la main droite, comme expliqué au paragraphe **2.2.1**.

On rencontre fréquemment le cas où la droite d'action coupe (Δ). Dans ce cas le bras de levier est nul donc $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$.



Exemple

Le pendule ci-contre est réalisé avec un fil inextensible sans masse de longueur ℓ. On y accroche une masse ponctuelle m. Déterminer le moment du poids $\vec{P}$ et de la tension du fil $\vec{T}$ par rapport à l'axe (Oz).

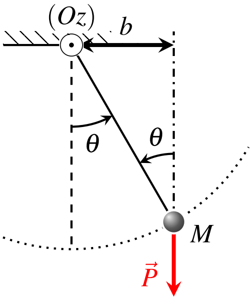


► **Calculer un moment de force scalaire avec le bras levier**

On commence par la tension du fil. **Sa droite d'action coupe l'axe** (Oz) donc $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0}$.

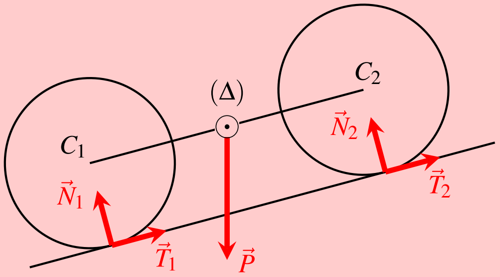
Le poids tend à faire tourner la direction (OM) dans le sens horaire. La règle de la main droite indique que dans cette situation $\mathcal{M}_z(\vec{P}) < 0$. On trace la droite d'action du poids et on représente schématiquement son bras de levier. On trouve alors rapidement que $b = \ell \sin\theta$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\ell \sin\theta \|\vec{P}\| = -mg\ell \sin\theta}$$



Application 3

Voici une modélisation rudimentaire d'un vélo posé sur une route inclinée. Chaque roue a un rayon R. Les centres des deux roues sont distances de $C_1C_2 = 4R$. Le centre d'inertie du vélo se trouve au centre du segment $[C_1C_2]$. Le vélo est soumis à son poids et à la réaction du sol (composante normale et tangentielle) qui s'applique à chacune des roues, au niveau du point de contact avec le sol.



Exprimer le moment scalaire de chacune de ces forces, par rapport à l'axe (Δ) passant par le centre d'inertie, en fonction de R, $\|\vec{N}_1\|$, $\|\vec{T}_1\|$, $\|\vec{N}_2\|$ et $\|\vec{T}_2\|$.

2.3 Théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel M, par rapport à un axe orienté fixe (Δ)

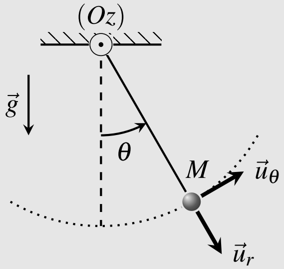
Moment d'une force par rapport à un point A

On se place dans un référentiel $\mathscr{R}$ **galiléen** et on considère un axe orienté (Δ) **fixe** dans $\mathscr{R}$. Le système est un point matériel M soumis à différentes forces extérieures. Le théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport à (Δ), s'énonce ainsi :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{F})}$$

Exemple

Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple sans frottement en appliquant le théorème du moment cinétique **par rapport à** (Oz).



▶ Mettre en œuvre le TMC par rapport à un axe orienté fixe

On étudie le mouvement de la masse ponctuelle M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottements celle-ci est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil. On applique le théorème du moment cinétique à la masse, par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) (**précisez systématiquement par rapport à quel axe orienté vous appliquez le TMC**):

$$\frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{T})$$

On a déjà calculé les moments de ces deux forces dans l'exercice précédent : $\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0$ et $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta$. On calcule le moment cinétique scalaire, sachant que l'axe (Oz) est orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$:

$$L_z(M) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{u}_z = \left(\ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) \cdot \vec{u}_z = m\ell^2\dot{\theta} \implies \frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\ddot{\theta}$$

On conclut :

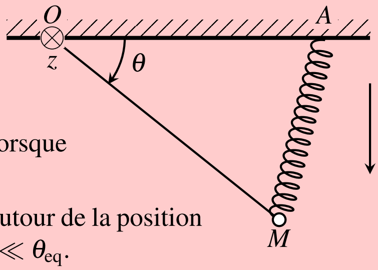
$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

La même équation différentielle peut être obtenue avec le PFD, le TMC vectoriel, le TMC scalaire, ou encore avec un raisonnement énergétique. En l'absence d'indications de l'énoncé vous pourrez choisir la méthode que vous préférez.

Remarque : Si l'une des forces n'est pas orthogonale à l'axe, vous ne pouvez pas utiliser la formule avec le bras de levier énoncée au paragraphe **2.2.2**. Il faudra revenir à la définition : $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_\Delta$.

Application 4

Un point matériel M de masse m est attaché d'une part à un fil inextensible sans masse et d'autre part à un ressort élastique de raideur k et longueur à vide nulle. Les deux sont fixés à un plafond horizontal, respectivement en O et A. La longueur du fil est telle que $OM = OA = a$. Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On néglige tout frottement.



1. Indiquer les forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments par rapport à (Oz).
2. Trouver une relation vérifiée par l'angle θ lorsque le système est à l'équilibre.

On étudie les mouvements de petite amplitude autour de la position d'équilibre. On pose $\theta(t) = \theta_{\mathrm{eq}} + \varepsilon(t)$ avec $|\varepsilon| \ll \theta_{\mathrm{eq}}$.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$ en simplifiant au premier ordre ($\cos\varepsilon \simeq 1$ et $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$). En déduire la pulsation des petites oscillations en fonction de m, g, k, a et θ_{eq}.