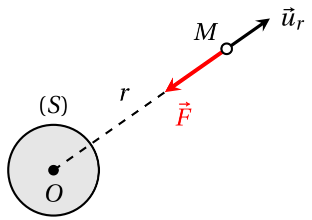
Chapitre 19 : Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

1 Champ de force centrale conservatif

1.1 Définition

On considère un système (S) susceptible d'exercer une force $\vec{F}(\vec{r})$ sur un objet ponctuel situé dans son voisinage. On dit que cette force est centrale s'il existe un point O tel que l'expression générale de la force, dans un repère sphérique de centre O, est du type :

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{u}_r}$$



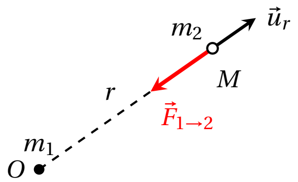
Le point O s'appelle alors le *centre de force*. Dit autrement, une force est centrale si elle est **radiale** et que son intensité dépend **uniquement de la distance** r **par rapport au centre de force** (elle est indépendante de la direction autour de O).

Si, en plus de cela, la force dérive d'une énergie potentielle ($\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$) alors le champ de force centrale est dit *conservatif*.

1.2 Force gravitationnelle

La force gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m_1 sur une autre masse ponctuelle m_2 s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_r}$$

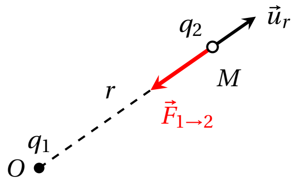


avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI la *constante gravitationnelle*. C'est une force centrale, dont l'intensité varie en $1/r^2$. Elle est **toujours attractive** (suivant $-\vec{u}_r$).

1.3 Force coulombienne

La force électrostatique (également appelée *force coulombienne*) exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u}_r}$$



avec $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ une constante fondamentale appelée *permittivité du vide*. C'est une force centrale, dont l'intensité varie elle aussi en $1/r^2$. Elle est attractive si les charges sont de signes opposés et répulsive si les charges sont de même signe.

Remarque : Les forces gravitationnelle et coulombienne ont une forme mathématique semblable (force centrale en $1/r^2$). On les range dans la catégorie des *forces newtoniennes*, c'est-à-dire du type :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad \text{avec} \qquad k = \begin{cases} -Gm_1 m_2 & \text{(force gravitationnelle)} \\ \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} & \text{(force coulombienne)} \end{cases}$$

Remarque : Il existe d'autres forces centrales. Par exemple la force exercée par un ressort (raideur k, longueur à vide ℓ_0) fixé en O, sur son autre extrémité, vaut $\vec{F} = -k(r-\ell_0)\vec{u}_r$.

1.4 Énergie potentielle d'un champ newtonien

Une force newtonienne est conservative et son énergie potentielle est du type : $E_p = \frac{k}{r} + \text{Cste}$. On choisit généralement l'origine de l'énergie potentielle à l'infini ($E_p = 0$ quand $r \to \infty$), ce qui revient à choisir une constante d'intégration nulle.

Énergie potentielle gravitationnelle	Énergie potentielle coulombienne
$E_p = -\dfrac{Gm_1 m_2}{r}$	$E_p = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

2 Relations de conservation, propriétés du mouvement

2.1 Conservation du moment cinétique

Dans un champ de force centrale issu de O, le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ se conserve.

2.1.1 Planéité du mouvement

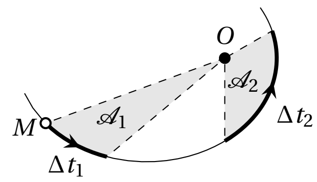
Le mouvement est contenu dans le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{L}_O(M)$.

2.1.2 Loi des aires

Énoncé géométrique : Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des durées égales (voir figure ci-dessous).

Énoncé mathématique : Les coordonnées polaires du point M vérifient l'intégrale première du mouvement :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{Cste}}$$



$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \iff \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$$

La quantité C est appelée *constante des aires*. L'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant un intervalle de temps Δt vaut : $\mathscr{A} = \frac{C}{2}\Delta t$.

2.2 Conservation de l'énergie mécanique

Si le champ de force centrale est conservatif, alors l'énergie mécanique se conserve. L'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{p,eff}}(r)} \qquad \boxed{E_{\text{p,eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_{\text{p}}(r)}$$

Où $E_{\text{p}}(r)$ est l'énergie potentielle associée au champ de force centrale conservatif et $E_{\text{p,eff}}(r)$ est appelée **énergie potentielle effective**. Elle permet d'interpréter *le mouvement radial* du système.

3 Cas du champ d'attraction gravitationnel

On étudie plus particulièrement dans ce paragraphe le mouvement d'un système de masse m autour d'un corps beaucoup plus massif ($M \gg m$), mû uniquement par la force de gravitation.

3.1 Référentiel d'étude

Dans ce chapitre on utilisera différents référentiels, suivant la nature de l'astre attracteur. Tous ces référentiels sont supposés galiléens. En voici deux exemples :

- Pour étudier le mouvement d'un corps autour du soleil on se place dans le **référentiel héliocentrique** ($\mathscr{R}_{\text{H}}$), lié à un trièdre fictif dont l'origine se trouve au centre du soleil et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines.
- Pour étudier le mouvement d'un corps autour de la Terre on se place dans le **référentiel géocentrique** ($\mathscr{R}_{\text{G}}$) est lié au trièdre dont l'origine se trouve au centre de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathscr{R}_{\text{H}}$.

3.2 Différents types de trajectoire possible

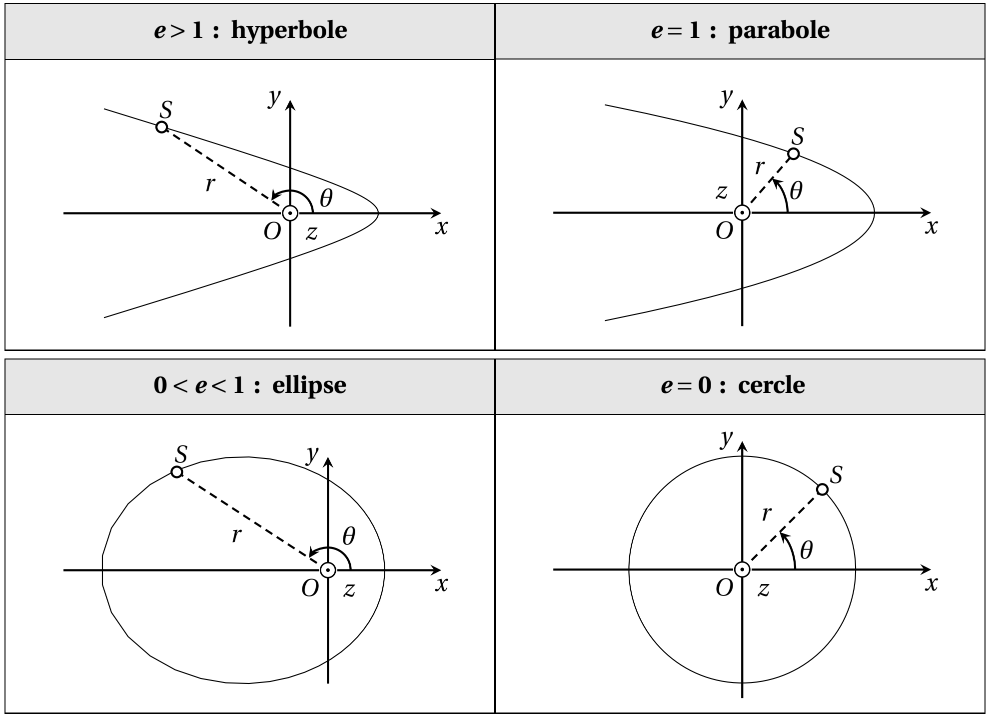
On admet la propriété suivante : la trajectoire d'une masse m dans un champ newtonien est une **conique** dont le centre de force est l'un des foyers, d'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

avec p le *paramètre* de la conique et e son *excentricité*. La définition du foyer d'une conique n'est pas à connaître. L'allure de la conique dépend de la valeur de l'excentricité (voir figure en page suivante) :

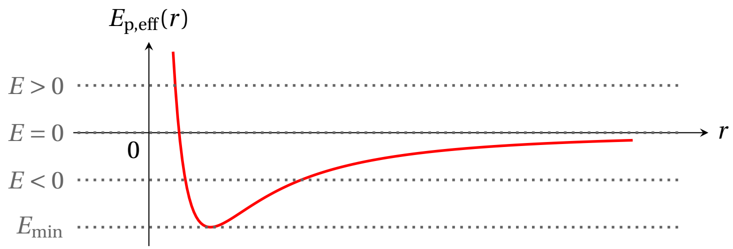
- La trajectoire est une **hyperbole** si $e > 1$;
- La trajectoire est une **parabole** si $e = 1$;
- La trajectoire est une **ellipse** si $0 < e < 1$;
- La trajectoire est un **cercle** si $e = 0$.

Plus l'excentricité est proche de zéro et plus l'orbite ressemble à un cercle. À l'inverse plus l'excentricité s'approche de l'unité (par valeurs inférieures) et plus l'ellipse s'allonge. À titre d'exemple l'orbite terrestre autour du soleil a une excentricité $e = 0,017$; elle est proche d'un cercle.



3.3 Étude énergétique, état lié et diffus

On trace ci-dessous l'allure de l'énergie potentielle effective de la masse m soumis à l'attraction gravitationnelle d'une masse $M \gg m$.



- **Propriété 1** : L'énergie potentielle effective diverge en $r = 0$ (barrière de potentiel infinie). Cela signifie que, quelque soit son énergie mécanique, **la masse m ne peut jamais atteindre le centre de force**.
- **Propriété 2** : Il y a également une barrière de potentiel dans la limite $r \to +\infty$, mais de hauteur finie cette fois-ci. Si l'énergie mécanique est positive alors le rayon n'est pas borné. La masse peut s'éloigner à l'infini du centre de force : on dit qu'elle est dans un **état diffus**.
- **Propriété 3** : Si l'énergie mécanique est strictement négative alors le rayon r est borné. La masse reste indéfiniment au voisinage du centre de force : on dit qu'elle est dans un **état lié**.

Ainsi, la nature de la trajectoire dépend de la valeur de l'énergie mécanique. On a mis en évidence, sur le graphe d'énergie potentielle effective, quatre cas de figure différents, qui correspondent aux quatre types de trajectoires possibles.

Énergie	$E > 0$	$E = 0$	$E_{\min} < E < 0$	$E = E_{\min}$
Trajectoire	Hyperbole	Parabole	Ellipse	Cercle
État	Diffus	Diffus	Lié	Lié

3.4 Vitesse de libération

On appelle *vitesse de libération d'un astre* la vitesse minimale avec laquelle il faut propulser un corps depuis la surface de cet astre pour qu'il puisse s'en éloigner définitivement (état diffus). Dans le cas d'un astre sphérique de rayon R et de masse M, la condition $E \geq 0$ permet d'obtenir une expression simple de cette vitesse de libération :

$$\boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

4 État lié dans un champ gravitationnel

4.1 Lois de Kepler

Les lois de Kepler concernent le mouvement des planètes du système solaire autour du soleil. Elles ont éte établies empiriquement par l'astronome allemand Johannes Kepler et énoncées entre 1609 et 1618.

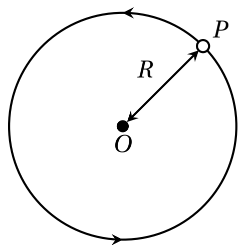
1° loi (loi des orbites) : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.

2° loi (loi des aires) : Les aires balayées par le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ (où S est le centre du Soleil et P le centre d'une planète) pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

3° loi (loi des périodes) : Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe a de sa trajectoire elliptique (M_s désigne la masse du soleil).

4.2 Trajectoires circulaires

L'orbite circulaire est la plus simple à étudier car le rayon et la vitesse sont constants. Pour une orbite de rayon R donné, on montre à l'aide du PFD que la vitesse, la période et l'énergie mécanique s'expriment de la manière suivante :



$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R_T}}} \quad ; \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}} \quad ; \quad \boxed{E = -\frac{GmM}{2R}}$$

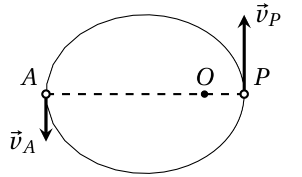
On retrouve au passage l'expression de la troisième loi de Kepler : $\boxed{\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^3}{GM}}$.

4.3 Trajectoires elliptiques

Péricentre, apocentre

Le péricentre P est le point de l'ellipse le plus proche du centre de force. L'apocentre A est le plus éloigné.

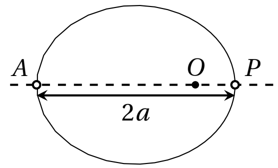
Pour une orbite solaire on parle de périhélie / aphélie et pour une orbite terrestre, de périgée / apogée.



Le péricentre et l'apocentre sont les deux seuls points de l'orbite pour lesquels la vitesse est **orthoradiale**. En effet en ces points r est minimal ou maximal donc $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. La loi des aires permet alors d'écrire une relation simple entre les rayons et les vitesses en A et P : $\boxed{r_A v_A = r_P v_P}$.

Demi-grand axe

La distance entre le péricentre et l'apocentre s'appelle le *grand axe* de l'ellipse. La demi-longueur du grand-axe, notée a, s'appelle le *demi-grand axe* de l'ellipse. Par définition on a donc : $\boxed{r_A + r_P = 2a}$.



Dans le cas d'une trajectoire elliptique, on retient que l'expression de la période et de l'énergie mécanique est semblable au cas circulaire, en remplaçant le rayon R par le deim-grand axe a de l'orbite :

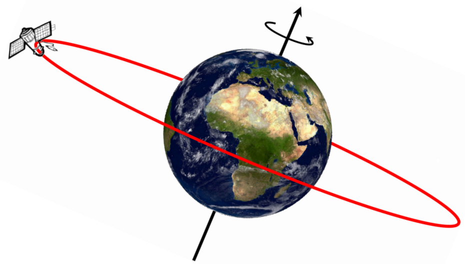
$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}} \quad ; \quad \boxed{E = -\frac{GmM}{2a}}$$

4.4 Jour sidéral, jour solaire

Def : On appelle **jour solaire** l'intervalle de temps qu'il faut à un point la Terre pour retrouver deux fois successivement le soleil à son zénith. La durée du jour solaire moyen sur Terre vaut 24 h, soit 86400 s.

Def : On appelle **jour sidéral** la période de révolution de la Terre autour de son axe. Le jour sidéral dure 23h56mn4s, soit 86164s.

4.5 Satellite géostationnaire



Def : Un satellite géostationnaire est un satellite qui est fixe dans le référentiel terrestre.

Parmi toutes les orbites possibles, une seule permet au satellite d'être géostationnaire :

Un satellite géostationnaire est en orbite **circulaire** contenue **dans le plan de l'équateur** et de période égale **à la durée du jour sidéral** : $T = T_{\text{sid}} = 86\,164\,\text{s}$. La troisième loi de Kepler permet de déterminer le rayon de cette orbite :

$$\boxed{R_{\text{géo}} = \left(\frac{GM_T T_{\text{sid}}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq 4,2\cdot 10^4\,\text{km}}$$

avec $M_T = 6,0\cdot 10^{24}\,\text{kg}$ la masse de la Terre.

4.6 Masse inertielle, masse gravitationnelle

Def : On appelle **masse inertielle** la grandeur qui quantifie l'inertie d'un système qu'on veut mettre en translation. C'est la masse du PFD : $m_i\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$.

Def : On appelle **masse pesante (ou masse gravitationnelle)** la grandeur qui quantifie l'intéraction gravitationnelle entre deux corps massifs. C'est la masse du poids : $\vec{P} = m_g\vec{g}$.

À l'heure actuelle, aucune théorie physique n'explique l'apparente égalité de ces deux masses, d'origines pourtant différentes. En 1915 Einstein élabora sa théorie de la relativité générale en postulant entre autres cette égalité, énoncée sous la forme du **principe d'universalité de la chute libre** :

> *Tout corps tombe de façon identique dans un champ de gravité externe, indépendamment de sa masse et de sa composition chimique.*

De nombreuses expériences ont cherché à détecter une écart entre masse inertielle et masse gravitationnelle. En 2017 l'expérience MICROSCOPE réalisée en orbite basse autour de la Terre (700 km) a confirmé la validité de l'universalité de la chute libre, avec une précision relative de $2\cdot 10^{-14}$!