Devoir n°21 (non surveillé)

EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4e^{-x} + x\ln(1+x) - x^2}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to1/2} \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \quad ; \quad \lim_{x\to0} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \lfloor x \rfloor).$$

EXERCICE 2

On considère la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ pour tout $x \in]0,1[$.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1. On notera toujours f la fonction ainsi prolongée.

2) f est-elle dérivable en 0 ?

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

2) Trouver quatre réels a, b, c, d tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k^2} + \dfrac{c}{k+1} + \dfrac{d}{(k+1)^2}$.

3) En déduire la limite de (u_n). On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.