Correction du DNS 18

EXERCICE 1

1) Calcul immédiat.

2) a) ($\Rightarrow$) Supposons que A est orthogonale. Alors $AA^T = I$, donc A est inversible et $A^{-1} = A^T$.

($\Leftarrow$) Supposons que A est inversible et que $A^{-1} = A^T$. Alors $AA^T = I$ donc A est orthogonale.

b) ($\Rightarrow$) Supposons que A est orthogonale. Alors A est inversible et $A^{-1} = A^T$, donc $A^TA = A^{-1}A = I$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A^TA = I$. Alors A est inversible et $A^{-1} = A^T$, et donc A est orthogonale.

3) a) Soient A et B deux matrices othogonales. Alors

$$AB(AB)^T = ABB^TA^T = AIA^T = AA^T = I$$

donc AB est orthogonale.

b) Soit A une matrice orthogonale. Alors A est inversible et $A^{-1} = A^T$ donc

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T) = A^{-1}A = I$$

donc A^{-1} est orthogonale.

c) Les matrices I et $-I$ sont orthogonales (car $I^TI = I$ et $(-I)^T(-I) = I$) mais $I + (-I) = 0$ ne l'est pas.

4) a) Calcul immédiat.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale. En écrivant que $AA^T = I$ on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right. .$$

Il existe donc deux réels θ et θ' tels que $\left\{ \begin{array}{l} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} c = \cos\theta' \\ d = \sin\theta' \end{array} \right.$.

L'égalité $ac+bd = 0$ donne $\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0$, soit $\cos(\theta-\theta') = 0$ (formule d'addition). On a donc $\theta - \theta' = \pi/2$ ou $-\pi/2$ modulo 2π, donc $\theta' = \theta - \pi/2$ ou $\theta + \pi/2$ modulo 2π.

Dans le premier cas on a donc $c = \sin\theta$ et $d = -\cos\theta$, ce qui donne $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, et dans le deuxième cas on a $c = -\sin\theta$ et $d = \cos\theta$, ce qui donne $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

1) Soient $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ deux éléments de E et soit α un réel. Alors $M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ 0 & b+b' \end{pmatrix} \in E$, $\alpha M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix} \in E$ et $MM' = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in E$.

2) Si $a = 0$ ou $b = 0$, la matrice M a une ligne ou une colonne nulle donc elle n'est pas inversible.

Si $ab \neq 0$ (i.e. si $a \neq 0$ et $b \neq 0$) alors en posant $M' = \begin{pmatrix} 1/a & -c/(ab) \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ on voit que $MM' = I$ donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -c/(ab) \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$. On peut aussi utiliser la méthode de Gauss.

3) a) On raisonne par récurrence. L'égalité est vraie pour $p = 1$ (en fait elle l'est aussi pour $p = 0$).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $M^p = \begin{pmatrix} a^p & c\frac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$. Alors

$$M^{p+1} = M^p \times M = \begin{pmatrix} a^{p+1} & a^pc + bc\frac{a^p-b^p}{a-b} \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & c\frac{a^{p+1} - ba^p + ba^p - b^{p+1}}{a-b} \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & c\frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a-b} \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix}$$

et le théorème de récurrence permet de conclure.

b) On peut écrire $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices aI et N commutent donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^p &= (aI+N)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (aI)^{p-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} N^k \\ &= \binom{p}{0} a^p I + \binom{p}{1} a^{p-1} N \text{ (car } N^k = 0 \text{ si } k \geqslant 2) \\ &= a^p I + p a^{p-1} N \\ &= \begin{pmatrix} a^p & p a^{p-1} c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4) a) On a

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} a^p & c\frac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} & \frac{c}{a-b} \sum_{p=0}^n \frac{a^p - b^p}{p!} \\ 0 & \sum_{p=0}^n \frac{b^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n(a) & \frac{c}{a-b}(\varphi_n(a) - \varphi_n(b)) \\ 0 & \varphi_n(b) \end{pmatrix}$$

donc $\alpha_n = \varphi_n(a)$, $\beta_n = \varphi_n(b)$ et $\gamma_n = \frac{c}{a-b}(\varphi_n(a) - \varphi_n(b))$ et donc $\alpha = e^a$, $\beta = e^b$ et $\gamma = \frac{c(e^a - e^b)}{a-b}$.

b) On a

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} a^p & p a^{p-1} c \\ 0 & a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} & c \sum_{p=0}^n \frac{p a^{p-1}}{p!} \\ 0 & \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n(a) & c\varphi_{n-1}(a) \\ 0 & \varphi_n(a) \end{pmatrix}$$

car $\sum_{p=0}^n \frac{p a^{p-1}}{p!} = \sum_{p=1}^n \frac{a^{p-1}}{(p-1)!} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a^p}{p!} = \varphi_{n-1}(a)$.

Ainsi $\alpha_n = \varphi_n(a)$, $\beta_n = \varphi_n(a)$ et $\gamma_n = c\varphi_{n-1}(a)$ et donc $\alpha = e^a$, $\beta = e^a$ et $\gamma = ce^a$.

5) a) Soient $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ deux matrices de E telles que $f(M) = f(M')$.

Si $a = b$ et $a' = b'$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ et $f(M') = \begin{pmatrix} e^{a'} & c'e^{a'} \\ 0 & e^{a'} \end{pmatrix}$ donc l'égalité $f(M) = f(M')$ donne immédiatement $a = a'$ puis $c = c'$, i.e. $M = M'$.

Si $a \neq b$ et $a' \neq b'$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} e^a & \frac{c(e^a - e^b)}{a-b} \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ et $f(M') = \begin{pmatrix} e^{a'} & \frac{c'(e^{a'} - e^{b'})}{a'-b'} \\ 0 & e^{b'} \end{pmatrix}$ donc l'égalité $f(M) = f(M')$ donne immédiatement $a = a'$ et $b = b'$ puis $c = c'$, i.e. $M = M'$. .

Si $a = b$ et $a' \neq b'$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ et $f(M') = \begin{pmatrix} e^{a'} & \frac{c'(e^{a'} - e^{b'})}{a'-b'} \\ 0 & e^{b'} \end{pmatrix}$ donc $f(M)$ et $f(M')$ ne peuvent pas être égales sinon on aurait $a = a'$ et $a = b'$ donc $a' = b'$.

De même, si $a \neq b$ et $a' = b'$ alors $f(M)$ et $f(M')$ ne peuvent pas être égales.

Ainsi on voit que si $f(M) = f(M')$ alors $M = M'$, donc l'application f est injective.

b) La matrice nulle n'a pas d'antécédent par f (car on ne peut pas écrire $0 = e^a$ avec a réel) donc f n'est pas surjective.

c) Notons F l'ensemble des éléments de E dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On a clairement $f(E) \subset F$. Établissons l'inclusion réciproque.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ un élément de F avec $a \neq b$. Alors on peut écrire que $M = f(N)$ où $N = \begin{pmatrix} \ln a & c\frac{\ln a - \ln b}{a-b} \\ 0 & \ln b \end{pmatrix}$, donc $M \in f(E)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de F. Alors on peut écrire que $M = f(N)$ où $N = \begin{pmatrix} \ln a & \frac{c}{a} \\ 0 & \ln a \end{pmatrix}$, donc $M \in f(E)$.

Ainsi on a bien $F \subset f(E)$, et donc $f(E) = F$.