TD19 : Forces centrales

⋆ Exercice 1 : ISS

On étudie le mouvement de la station spatiale internationale (ou ISS pour *International Space Station*) dans le référentiel géocentrique. Son orbite est quasi-circulaire, d'altitude $h = 4 \cdot 10^2$ km.

Données : masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, rayon terrestre : $R = 6,4 \cdot 10^3$ km, constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI.

1. Déterminer la vitesse de l'ISS dans le référentiel géocentrique.

2. Combien de révolutions autour de la Terre effectue l'ISS en vingt-quatre heures ?

⋆ Exercice 2 : Terre et comète de Haley

Dans le référentiel héliocentrique la trajectoire de la Terre autour du soleil est une ellipse faiblement aplatie. Le périhélie est à la distance $r_P = 0,983$ ua du centre du soleil, avec 1 ua $= 1,496 \cdot 10^8$ km l'*unité astronomique*. La période orbitale vaut $T = 365,25$ jours solaires.

Données : masse du soleil : $M_S = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, constante gravitationnelle : $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ SI.

1. À partir de T calculer le demi-grand axe a de l'orbite terrestre. En déduire la position r_A de l'aphélie.

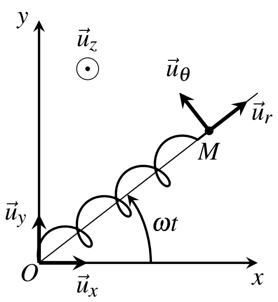
2. Exprimer l'énergie mécanique de la Terre associée à son mouvement orbital. En déduire les valeurs des vitesses orbitalaires v_P et v_A.

3. Calculer l'excentricité e de la trajectoire de la Terre, définie par $e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$. Commenter le résultat.

4. La comète de Haley possède une trajectoire elliptique beaucoup plus allongée que celle de la Terre. Elle passe au voisinage du soleil environ tous les 76 ans et son périhélie est situé à une distance $r_P = 0,59$ ua du soleil. Calculer l'excentricité de sa trajectoire. Conclure.

⋆ Exercice 3 : Ressort en rotation

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan horizontal. Le palet est fixé à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée en O. On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM}(t=0) = \ell_1 \vec{u}_x$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \ell_1 \omega \vec{u}_y$ orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. Par la suite on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (Oxy).



1. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ se conserve.

2. On cherche à étudier le mouvement d'un point de vue énergétique.

a) Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + E_{\text{p,eff}}(r)$. Préciser l'expression de $E_{\text{p,eff}}(r)$ et tracer son allure.

b) La masse peut-elle se trouver dans un état diffus ? La masse peut-elle atteindre le centre d'attraction ?

3. Déterminer une relation entre ℓ_1, k, ℓ_0 et ω pour que le mouvement soit circulaire. Cette condition est-elle valable pour tout ω ?

⋆⋆ Exercice 4 : Erreur de satellisation

On souhaite lancer un satellite artificiel, de masse m, sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à cette distance r_0 du centre de la Terre, et lui donner une vitesse $\vec{v}$ orthoradiale (selon $\vec{u}_\theta$) avec une valeur très précise (cf exercice sur l'orbite de transfert).

1. Montrer qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Exprimer alors la vitesse v à donner pour obtenir la trajectoire de rayon r_0.

2. En déduire dans ce cas l'expression de la constante des aires C et de l'énergie mécanique E_m.

3. Le satellite ayant été amené à la distance r_0, une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse. Le vecteur $\vec{v}'$ a la norme voulue mais il fait un petit angle α avec le vecteur $\vec{u}_\theta$.

a) Quelles sont alors les expressions de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?

b) Déterminer le demi-grand axe a de l'ellipse réellement décrite par le satellite.

c) On cherche à calculer les distances r_A et r_P entre le satellite et le centre de la Terre lorsqu'il se trouve respectivement à l'apogée et au périgée. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que r_A et r_P sont les deux racines d'un trinôme. Exprimer r_A et r_P en fonction de r_0 et de α.

⋆⋆ Exercice 5 : Libération d'un vaisseau spatial

Un vaisseau spatial de masse m se trouve en orbite circulaire de rayon r_0 autour d'une planète de masse M. Il possède une vitesse v_0. Il cherche à s'échapper de l'attraction de cette planète. Pour cela on suppose que le vaisseau a une réserve de carburant qui lui permet de modifier instantanément sa vitesse de $\Delta v = 4v_0$. On souhaite comparer les deux stratégies suivantes :

a) Le vaisseau utilise toute ses réserves de carburant pour quitter l'orbite circulaire.

b) Le vaisseau commence par ralentir instantanément jusqu'à une vitesse $v_0/2$, puis il utilise tout son carburant à l'instant où il passe par le périgée de sa nouvelle trajectoire.

1. Exprimer l'énergie mécanique finale E_f du satellite dans le cas a) en fonction de m et v_0. Justifier que ce dernier quitte le champ d'attraction de la planète.

2. Justifier que le satellite, après avoir ralenti instantanément à la vitesse $v_0/2$, se trouve à l'apogée d'une nouvelle trajectoire elliptique. Exprimer le demi-grand axe a de cette trajectoire en fonction de r_0.

3. On note respectivement A et P l'apogée et le périgée du satellite sur sa trajectoire elliptique, r_A et r_P leur distance par rapport au centre de la planète et v_A et v_P la vitesse du satellite en ces points. Montrer que $r_A v_A = r_P v_P$.

4. Exprimer r_P et v_P en fonction de r_0 et v_0.

5. Exprimer E_f dans le cas b) en fonction de m et v_0. Comparer les deux stratégies et conclure.

⋆⋆ Exercice 6 : Le petit prince

Évaluer le rayon d'une planète telle qu'en sautant à pieds joints, on puisse échapper à sa pesanteur. On supposera que la planète a une densité identique à celle de la Terre et on pourra admettre, pour simplifier, que le champ de pesanteur à la surface de la Terre vaut $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$, où M_T est la masse de la Terre et R_T son rayon.

⋆⋆ Exercice 7 : Trajectoire dans un champ gravitationnel

Un satellite de masse m est en orbite autour de la Terre, de masse $M \gg m$ et de centre O.

1. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ du satellite par rapport à O est une constante du mouvement.

2. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ tel que $\vec{L} = L\vec{u}_z$. Montrer que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\dot{\theta}$ en fonction de L et m.

3. Montrer que le vecteur $\vec{e} = \frac{L}{GMm}\vec{V} - \vec{u}_\theta$ est une constante du mouvement ($\vec{V}$ étant la vitesse du satellite).

4. On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = (\vec{e}, \vec{u}_\theta)$. Placer $(\vec{e}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \overrightarrow{OS})$ sur un schéma dans le plan du mouvement. Calculer $\vec{e}.\vec{u}_\theta$ et en déduire que l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires, peut s'écrire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{où } e = \|\vec{e}\| \text{ et } p \text{ est à expliciter.}$$

5. Pour quelle valeur de e la trajectoire est-elle circulaire ? Retrouver dans ce cas l'expression de la vitesse du satellite en fonction du rayon R de la trajectoire.

Solutions :

Ex1 : 1. $v = 7,7\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ 2. $15,5$ révolutions.

Ex2 : 1. $r_A = 1,017\,\mathrm{ua}$ 2. $v_P = 30,3\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $v_A = 29,3\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$

3. $e = 0,017$ 4. $e = 0,97$

Ex3 : 2.(a) $E_{\mathrm{p,eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$ 3. $\ell_1 = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$ il faut $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ex4 : 2. $C = \sqrt{GMr_0}$ 3.a) E_m est inchangée, $C = \cos\alpha\sqrt{GMr_0}$

b) $a = r_0$ c) $r_A = r_0\,(1 + \sin\alpha)$ et $r_P = r_0\,(1 - \sin\alpha)$

Ex5 : 1. $E_{\mathrm{f}} = \frac{23}{2}mv_0^2$ 2. $a = \frac{4r_0}{7}$ 4. $r_P = \frac{r_0}{7}$, $v_P = \frac{7v_0}{2}$ 5. $E_{\mathrm{f}} = \frac{169}{8}mv_0^2$

Ex6 : $R \approx 2\,\mathrm{km}$

Ex7 : 4. $p = \frac{C^2}{GM}$ 5. $\mathrm{e} = 0$, $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$