TD18 : TMC - corrigé

Application 1

On utilise la règle de la main droite. Le déplacement de M fait tourner la direction (OM) dans le sens anti-horaire donc $\vec{L}_O(M)$ est **entrant** ($\odot$). Le poids tend à faire tourner la direction (OM) dans le sens horaire donc $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P})$ est **sortant** ($\otimes$). La tension du fil est dirigée vers O donc $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$.

Application 2

On modifie le théorème du moment cinétique énoncé dans l'exemple, en ajoutant la force de frottement fluide :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{T}) + \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f})$$

On calcule le moment de la force de frottement :

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge (-\alpha\vec{v}) = \ell\vec{u}_r \wedge (-\alpha\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = -\alpha\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

La projection du TMC sur $\vec{u}_z$ conduit à :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - \alpha\ell^2\dot{\theta}$$

que l'on simplifie dans l'approximation des petits angles :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\theta - \alpha\ell^2\dot{\theta} \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

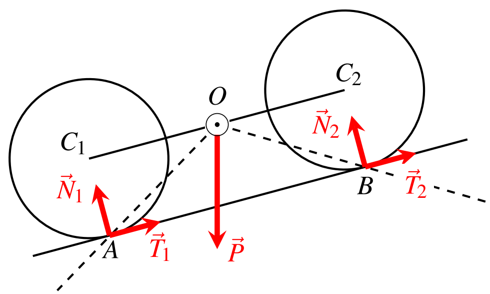
On identifie la pulsation propre et le facteur de qualité :

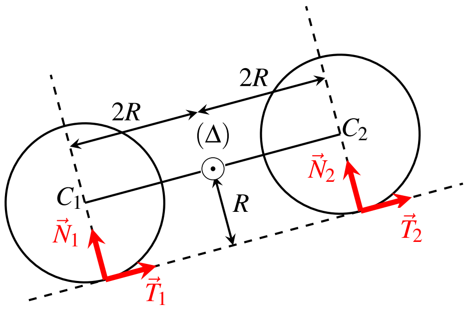
$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

Application 3

On commence par déterminer le signe des différents moments de force. La force $\vec{N}_1$ tend à faire tourner la direction (OA) dans le sens horaire donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{N}_1) < 0$. La force $\vec{T}_1$ tend à faire tourner (OA) dans le sens anti-horaire donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}_1) > 0$.

Les forces $\vec{N}_2$ et $\vec{T}_2$ tendent à faire tourner la direction (OB) dans le sens anti-horaire donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{N}_1) > 0$ et $\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}_2) > 0$. Enfin le poids s'applique en un point de l'axe donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ (bras de levier nul). On représente sur la figure les droites d'action des différentes forces et leur bras de levier.



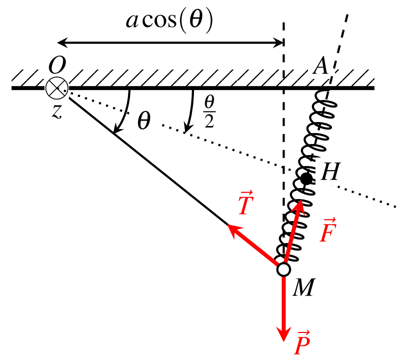


Les réactions normales $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ ont un bras de levier égal à $2R$. Les réactions tangentielles $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ ont un bras de levier égal à R. On peut conclure :

$$\boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{N}_1) = -2R\|\vec{N}_1\|} \; ; \; \boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{N}_2) = 2R\|\vec{N}_2\|} \; ; \; \boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}_1) = 2\|\vec{T}_1\|}$$

$$\boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}_2) = R\|\vec{T}_1\|} \; ; \; \boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \vec{0}}$$

Application 4



1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la tension du fil $\vec{T}$ et à la force de rappel élastique $\vec{F}$ exercée par le ressort. On les représente sur le schéma. La règle de la main droite indique que $\mathscr{M}_z(\vec{F}) < 0$ et $\mathscr{M}_z(\vec{P}) > 0$ (car l'axe (Oz) est $\otimes$). La tension est dirigée vers (Oz) donc $\mathscr{M}_z(\vec{T}) = 0$. On trace les droites d'action de $\vec{P}$ et $\vec{F}$. Le bras de levier du poids est égal à $a\cos\theta$ donc $\boxed{M_z(\vec{P}) = mga\cos\theta}$.

Le bras de levier de la force de rappel s'identifie à la distance OH, avec H le projeté de O sur la droite d'action. Pour calculer cette distance on remarque que le triangle OAM est isocèle en O donc H est au centre du segment $[AM]$ et la droite (OH) est la bissectrice de l'angle θ. Ainsi, sachant que $OA = a$, on peut dire que $OH = a\cos\frac{\theta}{2}$. Puisque la longueur à vide du ressort est nulle, la norme de la force de rappel vaut : $\|\vec{F}\| = kAM = 2kAH = 2ka\sin\frac{\theta}{2}$. On en déduit que :

$$\mathscr{M}_z(\vec{F}) = -OH \times \|\vec{F}\| = -ka^2 \times 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

Cette expression se simplifie sous la forme : $\boxed{\mathscr{M}_z(\vec{F}) = -ka^2\sin\theta}$.

2. On applique le théorème du moment cinétique à M, par rapport à l'axe orienté fixe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On se place à l'équilibre donc le moment cinétique est nul :

$$\mathscr{M}_z(\vec{P}) + \mathscr{M}_z(\vec{F}) = 0 \iff mga\cos\theta_{\text{eq}} - ka^2\sin\theta_{\text{eq}} = 0 \iff \boxed{\tan\theta_{\text{eq}} = \frac{mg}{ka}}$$

3. Dans le cas général le TMC conduit à :

$$ma^2\ddot{\theta} = mga\cos\theta - ka^2\sin\theta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \\ \cos\theta = \cos(\theta_{eq}+\varepsilon) \simeq \cos\theta_{eq} - \varepsilon\sin\theta_{eq} \\ \sin\theta = \sin(\theta_{eq}+\varepsilon) \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq} \end{cases}$$

On obtient alors :

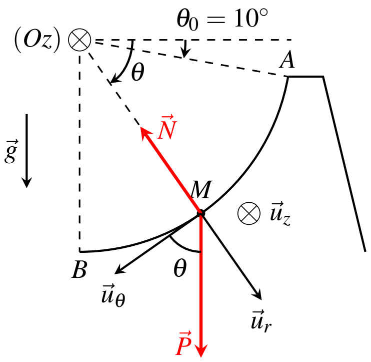
$$ma^2\ddot{\varepsilon} = \underbrace{mga\cos\theta_{eq} - ka^2\sin\theta_{eq}}_{=0 \text{ (cf question 2)}} - \left(mga\sin\theta_{eq} + ka^2\cos\theta_{eq}\right)\varepsilon$$

Après simplification on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{a}\sin\theta_{eq} + \frac{k}{m}\cos\theta_{eq}\right)\varepsilon = 0$$

La pulsation des petites oscillations vaut : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}\sin\theta_{eq} + \frac{k}{m}\cos\theta_{eq}}}$.

⋆ Exercice 1 : Le toboggan



1. On applique le TMC à l'enfant, par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{N})$$

Ce qui donne, en coordonnées cylindriques :

$$mr^2\ddot{\theta} = mgr\cos\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0}$$

2. On applique le TEC à l'enfant dans le référentiel terrestre, entre A et M :

$$E_c(M) - \underbrace{E_c(A)}_{=0} = W(\vec{P}) + \underbrace{W(\vec{N})}_{=0} = mg(z_A - z_M) = mgr(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

On détermine la vitesse au point M :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr(\sin\theta_0 - \sin\theta) \iff \boxed{v = \sqrt{2gr(\sin\theta - \sin\theta_0)}}$$

Au point B ($\theta = \frac{\pi}{2}$), la vitesse vaut $\boxed{v_B = \sqrt{2gr(1-\sin\theta_0)} = 6{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

⋆ Exercice 2 : Pendule conique

1. Le mouvement de la masse est circulaire et uniforme, de rayon $r = \ell\sin\alpha$. Dans la base cylindrique, $\vec{v} = \ell\sin\alpha\ \omega\vec{u}_\theta$ et le moment cinétique vaut :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = \ell(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_r)\wedge m\ell\omega\sin\alpha\vec{u}_\theta$$

Après calcul, on obtient $\boxed{\vec{L}_O(M) = m\ell^2\omega\sin\alpha(\cos\alpha\vec{u}_r + \sin\alpha\vec{u}_z)}$.

On dérive par rapport au temps (seul $\vec{u}_r$ est variable dans l'expression de $\vec{L}_O(M)$) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{u}_\theta}$$

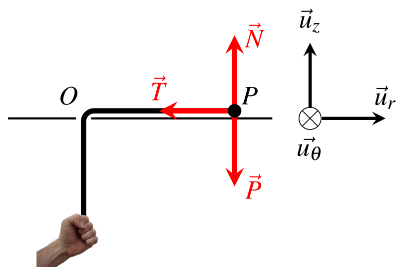
2. On applique le TMC à la masse m, par rapport à O, fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \ell(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_r)\wedge -mg\vec{u}_z = mg\ell\sin\alpha\vec{u}_\theta$.
Le moment de la tension du fil est nul car $\vec{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. Par projection sur $\vec{u}_\theta$, on obtient :

$$m\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = mg\ell\sin\alpha \iff \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}}$$

⋆⋆ Exercice 3 : Mouvement d'une masse attachée à un fil



1. On applique le TMC à la masse m, par rapport à O, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(P)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N})$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$ car $\vec{T} \,/\!/\, \overrightarrow{OP}$ et $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N}) = \overrightarrow{OP}\wedge(\vec{P}+\vec{N}) = \vec{0}$ car $\vec{P}$ et $\vec{N}$ se compensent (le mouvement reste horizontal).

Par conséquent $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(P)}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ donc le moment cinétique du point P se conserve au cours du temps. Or :

$$\vec{L}_O(P) = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z \iff \ell^2\dot{\theta} = \mathrm{Cste}$$

À $t = 0$, $\dot{\theta} = \omega_0$ et $\ell = a$ donc : $a^2\omega_0 = \ell^2\dot{\theta} \iff \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{a^2}{\ell^2}\omega_0 = \frac{a^2}{(a-bt)^2}\omega_0}$.

2. On applique le PFD à la masse m dans le référentiel terrestre, projeté sur $\vec{u}_r$:

$$-m\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r = \vec{T} \iff \boxed{\vec{T} = -m\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2}\omega_0\right)^2\vec{u}_r = -\frac{ma^4\omega_0^2}{\ell^3}\vec{u}_r}$$

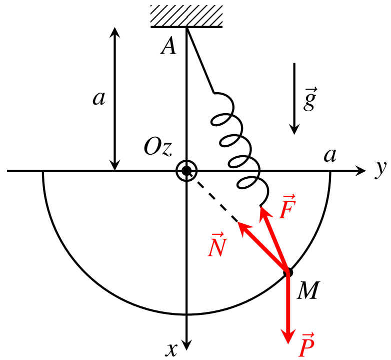
3. On applique le TEC à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen, entre la date $t = 0$ et une date t quelconque :

$$W(\vec{T}) = E_c - E_{c,0} = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}m(a\omega_0)^2$$

Le poids et la réaction ne travaillent pas car elles sont orthogonales au mouvement. En exprimant $\dot{\theta}$ en fonction de ℓ, on obtient :

$$\boxed{W(\vec{T}) = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\left(\frac{a^2}{\ell^2} - 1\right)}$$

⋆⋆ Exercice 4 : Pendule à ressort



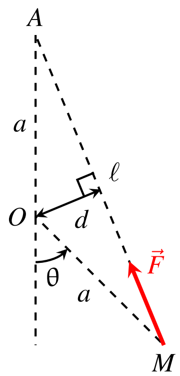
1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F}$ et à la réaction normale du rail $\vec{N}$. On applique le TMC à la masse M par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{N}) + \mathcal{M}_z(\vec{F})$$

avec $\frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = ma^2\ddot{\theta}$, $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mga\sin\theta$ et $\mathcal{M}_z(\vec{N}) = 0$.

On calcule le bras de levier de la force de rappel. Dans un premier temps, on note que $\widehat{AOM} = \pi - \theta$. Comme le triangle AOM est isocèle en O, on en déduit que :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} = \frac{\theta}{2}$$



Le bras de levier vaut donc : $d = a\sin\frac{\theta}{2}$. On exprime maintenant le moment scalaire de la force de rappel (d'après la valeur de ℓ_0, on peut vérifier que le ressort est toujours étiré) :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = d \cdot k(\ell - \ell_0)$$

Il reste à exprimer la longueur $\ell = AM$ du ressort :

$$\ell = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

On termine le calcul du moment :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = a\sin\frac{\theta}{2}\cdot k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right) = ka^2\sin\theta - ka\ell_0\sin\frac{\theta}{2}$$

On revient maintenant au TMC :

$$ma^2\ddot{\theta} = (ka^2 - mga)\sin\theta - ka\ell_0\sin\frac{\theta}{2}$$

Après simplifications, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \frac{k}{m}\right)\sin\theta + \frac{k\ell_0}{ma}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

Enfin, en utilisant les notations de l'énoncé, on aboutit à l'expression attendue :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\left(\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\right) = 0}$$

2. Le système est en équilibre si :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{N}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}) = 0 \iff \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta = 0$$

En utilisant la formule de l'angle double, on réécrit cette équation de la manière suivante :

$$\sin\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0 \iff \begin{cases} \sin\frac{\theta}{2} = 0 & \iff \boxed{\theta_{\mathrm{eq1}} = 0} \\ \text{ou} & \\ \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \iff \boxed{\theta_{\mathrm{eq2}} = \frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

3. On simplifie l'équation du mouvement autour de $\theta_{\mathrm{eq1}} = 0$:

$$\sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \simeq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par ailleurs, $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$, d'où :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon - \varepsilon\right) = 0 \iff \boxed{\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\omega^2\varepsilon = 0}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique. On en déduit que la position d'équilibre $\theta_{\mathrm{eq1}} = 0$ est stable et la pulsation propre des petites oscillations vaut :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}\,\omega}$$

On simplifie maintenant l'équation du mouvement autour de $\theta_{\mathrm{eq2}} = \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) \simeq \sin\frac{\pi}{3} + \varepsilon\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \simeq \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon \end{cases}$$

d'où :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \left(\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = 0$$

Après simplifications, on aboutit à :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{4} \varepsilon = 0$$

Il s'agit à nouveau de l'équation d'un oscillateur harmonique. On en déduit que la position d'équilibre $\theta_{\text{eq2}} = \frac{\pi}{3}$ est stable et la pulsation propre des petites oscillations vaut :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\omega}{2}}$$