Chapitre 14

ESPACES VECTORIELS

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

1 Définition

Définition 1 *On appelle* **espace vectoriel sur** K *ou* K**-espace vectoriel** *un ensemble E non vide muni d'une loi de composition interne $+$, appelée addition, et d'une opération externe $. : K \times E \to E$, appelée multiplication par un scalaire, telles que :*

1. l'addition est associative, commutative, admet un élément neutre et tout élément de E admet un opposé (on dit alors que $(E, +)$ est un groupe abélien),

2. les quatre axiomes suivants sont vérifiés :

(i) $\forall\, x \in E,\ 1.x = x$,

(ii) $\forall\, \alpha, \beta \in K,\ \forall\, x \in E,\ \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$,

(iii) $\forall\, \alpha, \beta \in K,\ \forall\, x \in E,\ (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$,

(iv) $\forall\, \alpha \in K,\ \forall\, x, y \in E,\ \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. L'élément neutre pour $+$ est appelé **vecteur nul** et noté 0_E ou simplement 0. L'opposé de $x \in E$ est noté $-x$. Les éléments de K sont appelés **scalaires**.

Proposition 1 *Soit E un K-espace vectoriel. Alors :*
(i) $\forall\, x \in E,\ 0.x = 0_E$.

(ii) $\forall\, \alpha \in K,\ \alpha.0_E = 0_E$.

(iii) $\forall\, \alpha \in K,\ \forall\, x \in E,\ (\alpha.x = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.

Démonstration :
(i) L'axiome (iii) permet d'écrire que $0.x = (0 + 0).x = 0.x + 0.x$. En ajoutant $-0.x$ des deux côtés on obtient $0.x = 0_E$.
(ii) L'axiome (iv) permet d'écrire que $\alpha.0_E = \alpha.(0_E + 0_E) = \alpha.0_E + \alpha.0_E$, donc $\alpha.0_E = 0_E$.
(iii) Supposons que $\alpha.x = 0_E$ et que $\alpha \neq 0$. Alors, par les axiomes (i) et (ii), on a $x = 1.x = \left(\frac{1}{\alpha} \times \alpha\right).x = \frac{1}{\alpha}.(\alpha.x) = \frac{1}{\alpha}.0_E = 0_E$. □

2 Exemples

L'ensemble des vecteurs du plan et l'ensemble des vecteurs de l'espace, munis de l'addition et de la multiplication par un scalaire habituels, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Beaucoup d'autres ensembles, dont les éléments ne sont pas a priori de nature géométrique, ont une structure d'espace vectoriel.

• Espace vectoriel $(K, +, .)$

Proposition 2 $(K, +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

Ici $+$ et $.$ sont l'addition et la multiplication habituelles dans K.

Démonstration :

L'addition dans K est commutative, associative, 0 est élément neutre, et tout élément x de K admet comme opposé $-x$. L'axiome (i) revient à dire que 1 est élément neutre pour la multiplication. Le (ii) n'est autre que l'associativité de la multiplication. Les (iii) et (iv) correspondent à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. □

Remarque : $\mathbb{C}$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais il a aussi une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• Espace vectoriel $(K^n, +, .)$

On a vu que K^n est l'ensemble des n-uplets d'éléments de K :

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1, \dots, x_n \in K\}.$$

On définit sur K^n une addition par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et une multiplication par un scalaire par :

$$\alpha.(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Proposition 3 $(K^n, +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

Démonstration :

L'addition sur K est commutative et associative donc l'addition sur K^n aussi. $(0, \dots, 0)$ est élément neutre et l'opposé de $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$. La vérification des quatre axiomes est immédiate. □

En particulier, en identifiant un vecteur du plan ou de l'espace à ses coordonnées dans un repère donné, on voit que l'on peut identifier l'espace vectoriel des vecteurs du plan à $\mathbb{R}^2$ et l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace à $\mathbb{R}^3$.

• Espace vectoriel $(K[X], +, .)$

On rappelle que $K[X]$ est l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K. On a défini au chapitre 11 une addition $+$ et une multiplication par un scalaire . dans $K[X]$, et on a vu que :

Proposition 4 $(K[X], +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

• Espace vectoriel $(K^{\mathbb{N}}, +, .)$

$K^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites d'éléments de K. Il est muni d'une addition définie par $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ et d'une multiplication par un scalaire définie par $\alpha.(u_n) = (\alpha u_n)$. On vérifie sans difficulté que :

Proposition 5 $(K^{\mathbb{N}}, +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

• Espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, .)$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices de type (n, p) à coefficients dans K a été muni au chapitre 10 d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, et la proposition 1 de ce chapitre affirme exactement que :

Proposition 6 $(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

• Espace vectoriel $(\mathcal{F}(I, K), +, .)$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I, K)$ des applications de I dans K est muni d'une addition ($f + g$ est définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) et d'une multiplication par un scalaire ($\alpha.f$ est définie par $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$).

Proposition 7 $(\mathcal{F}(I, K), +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

Plus généralement, si X est un ensemble et E un K-espace vectoriel, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E peut être muni d'une structure de K-espace vectoriel de la manière suivante. Si $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$, alors on définit l'application $f + g : X \to E$ par :

$$\forall\, x \in X,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et si $\alpha \in K$ et $f \in \mathcal{F}(X, E)$, alors on définit l'application $\alpha.f : X \to E$ par :

$$\forall\, x \in X,\ (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x).$$

Proposition 8 $(\mathcal{F}(X, E), +, .)$ *est un K-espace vectoriel.*

Démonstration :

Les propriétés des opérations $+$ et . sur E se transmettent à celles sur $\mathcal{F}(X, E)$. Établissons par exemple l'associativité de $+$. Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(X, E)$. Pour tout $x \in X$ on a $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x)$ et $(f+(g+h))(x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$. Or $+$ sur E est associative, donc $(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$. On a donc $((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x)$ pour tout x, ce qui signifie que $(f + g) + h = f + (g + h)$.

Les autres propriétés se montrent de la même manière. □

II Sous-espaces vectoriels

1 Définition

Définition 2 *Soit $(E, +, .)$ un K-espace vectoriel. Un* **sous-espace vectoriel** *de E est un sous-ensemble de E non vide stable par addition et par multiplication par un scalaire.*

Cela signifie que F est un sous-espace vectoriel de E si :

(i) $F \neq \emptyset$,

(ii) $\forall\, x, y \in F,\, x + y \in F$,

(iii) $\forall\, x \in F,\, \forall\, \alpha \in K,\, \alpha x \in F$.

Remarques :

1) On peut remplacer *(ii)* et *(iii)* par :

$$\forall\, x, y \in F,\, \forall\, \alpha, \beta \in K,\, \alpha x + \beta y \in F.$$

2) Par récurrence immédiate, on montre que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in F,\, \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,\, \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in F.$$

3) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$. En effet, soit $x \in F$ (F est non vide). Alors $0.x = 0_E \in F$.

4) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors les opérations $+$ et $.$ peuvent se restreindre à F, et $(F, +, .)$ est alors également un K-espace vectoriel. Pour montrer qu'un ensemble a une structure d'espace vectoriel, on pourra ainsi commencer par essayer de montrer que c'est un sous-espace d'un espace vectoriel connu.

2 Exemples

• $\{0_E\}$ ET E

Proposition 9 *Si E est un K-espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Démonstration : Immédiat. □

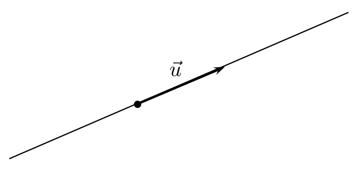
• SOUS-ESPACES VECTORIELS DE L'ENSEMBLE DES VECTEURS DU PLAN

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E_2, +, .)$ des vecteurs du plan. Recherchons ses sous-espaces vectoriels. D'après ce qui précède, on a déjà $\{\vec{0}\}$ et E_2.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. On appelle **droite vectorielle engendrée par** $\vec{u}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$. On le note $\mathbb{R}\vec{u}$:

$$\mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda \vec{u} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On montre facilement qu'une telle droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de E_2.



Soit F un sous-espace vectoriel de E_2 non réduit à $\{\vec{0}\}$. Il contient donc au moins un vecteur non nul $\vec{u}$. Mais alors il contient aussi l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. Si F contient un autre vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$, alors il contient l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire E_2 tout entier.

Conclusion : les sous-espaces vectoriels de E_2 sont le sous-espace nul $\{\vec{0}\}$, les droites vectorielles, et E_2 tout entier.

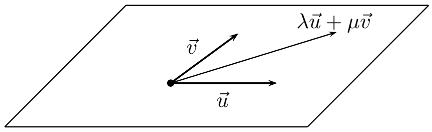
• SOUS-ESPACES VECTORIELS DE L'ENSEMBLE DES VECTEURS DE L'ESPACE

Considérons maintenant le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E_3, +, .)$ des vecteurs de l'espace. $\{\vec{0}\}$, E_3 et les droites vectorielles $\mathbb{R}\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ sont des sous-espaces vectoriels de E_3.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle **plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$** l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On montre facilement qu'une tel plan vectoriel est un sous-espace vectoriel de E_3.



Soit F un sous-espace vectoriel de E_3. S'il contient un vecteur non nul $\vec{u}$, alors il contient aussi l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. S'il contient un autre vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$, alors il contient l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. S'il contient un troisième vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, alors il contient l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire E_3 tout entier.

On voit ainsi que les sous-espaces vectoriels de E_3 sont le sous-espace nul $\{\vec{0}\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels, et E_3 tout entier.

• Sous-espaces vectoriels de $K[X]$

On rappelle que $K_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 10 $K_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de* $(K[X], +, .)$.

Démonstration :
(i) $K_n[X]$ n'est pas vide (le polynôme nul appartient à $K_n[X]$ par exemple).
(ii) $K_n[X]$ est stable par addition : si P et Q sont deux polynômes de degré $\leqslant n$, alors $P + Q$ aussi.
(iii) $K_n[X]$ est stable par multiplication par un scalaire : si $\alpha \in K$ et que P est un polynôme de degré $\leqslant n$, alors αP aussi. □

Exercice 1 L'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(0) = 0$ est-il un sous-espace vectoriel de $K[X]$? Et l'ensemble des polynômes P tels que $P(0) = 1$?

• Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Proposition 11 *L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$.

Démonstration :
Notons F cet ensemble.
(i) $F \neq \emptyset$ puisque F contient par exemple la suite nulle.
(ii) F est stable par addition : si les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors la suite $(u_n + v_n)$ aussi.
(iii) F est stable par multiplication par un scalaire : si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que la suite (u_n) est convergente, alors la suite (αu_n) aussi. □

Exercice 2 L'ensemble des suites arithmétiques est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Et l'ensemble des suites géométriques ?

• Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Proposition 12 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I est un sous-espace vectoriel de* $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, .)$.

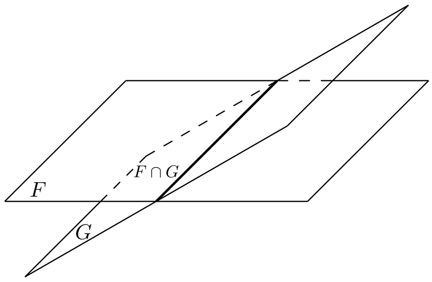
Démonstration :
(i) $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \neq \emptyset$ (par exemple, la fonction nulle est continue).
(ii) $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par addition : si les fonctions f et g sont continues, alors la fonction $f + g$ aussi.
(iii) $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par multiplication par un scalaire : si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que la fonction f est continue, alors la fonction αf aussi. □

De même on montre facilement que l'ensemble des fonction dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, .)$. L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I également.

Exercice 3 L'ensemble des fonctions paires est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Et l'ensemble des fonctions positives ? L'ensemble des fonctions croissantes ? L'ensemble des fonctions bijectives ?

3 Intersection de deux sous-espaces

Proposition 13 *Soit E un K-espace vectoriel. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ aussi.*



Démonstration :

F et G contiennent le vecteur nul, donc $F \cap G$ aussi.

Soient $x, y \in F \cap G$. Alors x et $y \in F$, donc $x + y \in F$ (F est stable par addition), et de même x et $y \in G$, donc $x + y \in G$. Par conséquent $x + y \in F \cap G$.

Soient $\alpha \in K$ et $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$, donc $\alpha x \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire), et de même $x \in G$, donc $\alpha x \in G$. Par conséquent $\alpha x \in F \cap G$.

$F \cap G$ est donc non vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire : c'est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Plus généralement on montre facilement :

Proposition 14 *Soient E un K-espace vectoriel et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque : En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel (considérer par exemple deux droites vectorielles du plan).

4 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 3 *Soit E un K-espace vectoriel et soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Le* **sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs** $u_1, \ldots, u_n$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_n$. On le note* $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Autrement dit :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}.$$

Par exemple, le sous-espace engendré par un vecteur non nul u est $\mathrm{Vect}(u) = \{\alpha u \mid \alpha \in K\}$: c'est la **droite vectorielle engendrée par** u (on la note aussi Ku). Le sous-espace engendré par deux vecteurs u et v non colinéaires est $\mathrm{Vect}(u, v) = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in K\}$: c'est le **plan vectoriel engendré par** u **et** v.

Proposition 15 $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$.*

Cela signifie que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, et que si F est un autre sous-espace de E qui contient $u_1, \ldots, u_n$, alors il contient $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Démonstration :

Montrons d'abord que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il est clairement non vide (par exemple, en prenant $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ on obtient le vecteur nul).

Il est stable par addition : $(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) = (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) u_n \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Il est stable par multiplication par un scalaire : $\lambda(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = (\lambda\alpha_1) u_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n) u_n \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

C'est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

Supposons maintenant que F est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$. Alors, d'après la remarque 2 suivant la définition d'un sous-espace vectoriel, il contient toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_n$, donc il contient $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. $\square$

Remarque : Souvent, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on essaiera de l'écrire comme un Vect plutôt que de vérifier la stabilité par l'addition et la multiplication par un scalaire. Exemples :

1) Soit $F = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Les éléments de F peuvent s'écrire sous la forme $x(1, 2, 3)$ avec $x \in \mathbb{R}$, donc $F = \mathrm{Vect}((1, 2, 3))$ et donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Considérons $K_2[X]$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à 2. Les éléments de $K_2[X]$ sont de la forme $aX^2 + bX + c$, ou encore $aX^2 + bX + c.1$, avec $a, b, c \in K$, donc $K_2[X] = \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)$.

3) Soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Exercice 4 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les écrivant sous forme de Vect :

1) $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

2) $\{(3x + y, 5x - 6y, -x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

4) $K_0[X]$, $K_1[X]$, $K_n[X]$ pour n quelconque.

5) $\{P \in K_2[X] \mid P(0) = 0\}$.

6) $\{P \in K_2[X] \mid X + 1 \text{ divise } P\}$.

7) $\left\{\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ 2a+b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

8) $\mathcal{D}_2(K)$, $\mathcal{S}_2(K)$ et $\mathcal{A}_2(K)$.

9) L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de trace nulle.

10) L'ensemble des suites réelles constantes.

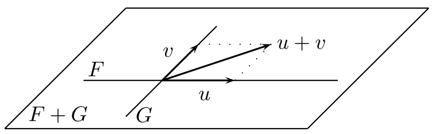
11) L'ensemble des fonctions affines.

5 Somme de deux sous-espaces

Définition 4 *Soient E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La* **somme de** F **et de** G *est l'ensemble des vecteurs de la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. On la note $F + G$.*

Autrement dit :

$$F + G = \{u + v \,/\, u \in F,\, v \in G\}.$$



En pratique, dire qu'un vecteur x appartient à $F + G$ signifie qu'on peut trouver un vecteur u dans F et un vecteur v dans G tels que $x = u + v$. Autrement dit :

$$x \in F + G \Leftrightarrow \exists\, u \in F, \exists\, v \in G, x = u + v.$$

Proposition 16 *La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration :

Le vecteur nul 0_E appartient à F et à G donc il appartient à $F + G$ ($0_E = 0_E + 0_E$).

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ et $x_1, x_2 \in F + G$. Il existe donc $u_1 \in F$ et $v_1 \in G$ tels que $x_1 = u_1 + v_1$ et il existe $u_2 \in F$ et $v_2 \in G$ tels que $x_2 = u_2 + v_2$. Alors $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1(u_1 + v_1) + \alpha_2(u_2 + v_2) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$. Or $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in F$ et $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in G$, donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F + G$.

$F + G$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Exercice 5 Déterminer $\mathcal{D}_2(K) + \mathcal{A}_2(K)$ puis $\mathcal{D}_2(K) + \mathcal{S}_2(K)$.

6 Somme directe

Définition 5 *Soient E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont* **en somme directe***, ou que* **la somme** $F + G$ **est directe***, si tout élément de $F + G$ s'écrit* de manière unique *comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

La somme $F + G$ est alors notée $F \oplus G$.

Proposition 17 *F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.*

Démonstration :
($\Rightarrow$) Supposons que F et G sont en somme directe et montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit donc $x \in F \cap G$. Alors on peut écrire x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G sous la forme $x + 0_E$ (car $x \in F$ et $0_E \in G$) mais aussi sous la forme $0_E + x$ (car $0_E \in F$ et $x \in G$). Or par hypothèse cette décomposition est unique : on a donc nécessairement $x = 0_E$.

($\Leftarrow$) Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $u \in F + G$. Par définition, il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que $u = x + y$. Le problème est de montrer que x et y sont uniques.

Supposons donc que l'on ait également $u = x' + y'$ avec $(x', y') \in F \times G$. Alors $x + y = x' + y'$ donc $x - x' = y' - y$. Mais $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$, donc $x - x' = y' - y \in F \cap G$. Or $F \cap G = \{0_E\}$, donc $x - x' = y' - y = 0$, d'où $x = x'$ et $y = y'$. $\square$

Par exemple, dans E_3, deux droites vectorielles non confondues sont en somme directe. Un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans le plan également. En revanche, deux plans vectoriels ne sont pas en somme directe.

Exercice 6 Déterminer dans chacun des cas suivants si les sous-espaces donnés sont en somme directe.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((0, 1, -1))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

3) Dans $\mathcal{M}_2(K)$, $\mathcal{D}_2(K)$ et $\mathcal{A}_2(K)$ puis $\mathcal{D}_2(K)$ et $\mathcal{S}_2(K)$.

4) Dans $\mathcal{M}_2(K)$, $\mathcal{D}_2(K)$ et l'ensemble des matrices de trace nulle.

7 Sous-espaces supplémentaires

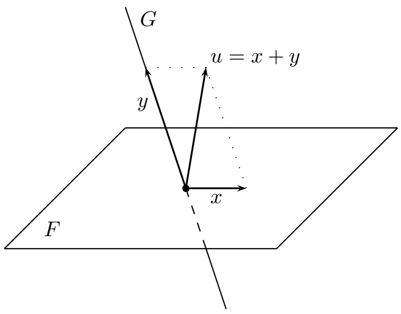
Définition 6 *Soient E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont* **supplémentaires** *si tout élément de E peut s'écrire* de manière unique *comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si leur somme est directe et qu'elle est égale à E, i.e. si $E = F \oplus G$. Ainsi :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall\, u \in E, \exists\,! \,(x, y) \in F \times G,\, u = x + y.$$

D'après la proposition précédente :

Proposition 18 *F et G sont supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0_E\}$.*



Exemples :
− Dans E_2 deux droites vectorielles non confondues sont supplémentaires.

− Dans E_3 deux droites vectorielles F et G non confondues ne sont pas supplémentaires (on a bien $F \cap G = \{0\}$ mais pas $E_3 = F + G$). Un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans le plan sont supplémentaires. Deux plans vectoriels F et G non confondus ne sont pas supplémentaires (on a bien $E_3 = F + G$ mais pas $F \cap G = \{0\}$).

− On a vu que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut se décomposer de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cela signifie exactement que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

− On a vu que toute matrice carrée peut se décomposer de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Cela signifie exactement que $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 7 Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils supplémentaires ?

1) Dans $\mathcal{M}_2(K)$, $\mathcal{D}_2(K)$ et $\mathcal{A}_2(K)$.

2) Dans $\mathcal{M}_2(K)$, $\mathcal{D}_2(K)$ et l'ensemble des matrices de trace nulle.

3) Dans $\mathcal{M}_2(K)$, $\mathrm{Vect}(I)$ et l'ensemble des matrices de trace nulle.

4) Dans $K[X]$, $K_1[X]$ et l'ensemble des polynômes divisibles par X^2.

5) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions constantes et l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0.

III Familles de vecteurs d'un espace vectoriel

1 Familles libres, familles liées

• Définition

Définition 7 *Soit E un K-espace vectoriel. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille* **libre***, ou que les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont* **linéairement indépendants***, si, pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$:*

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0).$$

Si $(u_1,\dots,u_n)$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée***.*

Autrement dit, la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre si la seule combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$ égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls. Elle est liée s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ *non tous nuls* tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$.

• Exemples

– Dans $\mathbb{R}^2$ la famille (u,v) où $u=(1,2)$ et $v=(2,4)$ est liée puisque $2u+(-1)v=0$.

– Dans $\mathbb{R}^2$ la famille (u,v) où $u=(1,0)$ et $v=(0,1)$ est libre. En effet :

$$\alpha u + \beta v = 0 \Leftrightarrow \alpha(1,0)+\beta(0,1)=0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\end{array}\right. .$$

– Dans $\mathbb{R}^3$, considérons la famille de vecteurs (u_1,u_2,u_3) avec $u_1=(-1,0,1)$, $u_2=(1,-1,0)$ et $u_3=(1,1,2)$.

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1(-1,0,1)+\lambda_2(1,-1,0)+\lambda_3(1,1,2)=(0,0,0)\\
& \Leftrightarrow & (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, -\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+2\lambda_3)=(0,0,0)\\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_3=0\end{array}\right.\\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}4\lambda_3=0\\ \lambda_2=\lambda_3\\ \lambda_1=-2\lambda_3\end{array}\right.\\
& \Leftrightarrow & \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.
\end{array}$$

La famille (u_1,u_2,u_3) est donc libre.

Considérons maintenant la famille de vecteurs (v_1,v_2,v_3) avec $v_1=(1,-1,1)$, $v_2=(2,1,-4)$ et $v_3=(1,-5,9)$.

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1(1,-1,1)+\lambda_2(2,1,-4)+\lambda_3(1,-5,9)=(0,0,0)\\
& \Leftrightarrow & (\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3, -\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3, \lambda_1-4\lambda_2+9\lambda_3)=(0,0,0)\\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ll}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 & \\ -\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3=0 & L_2\leftarrow L_2+L_1\\ \lambda_1-4\lambda_2+9\lambda_3=0 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\right.\\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ll}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 & \\ 3\lambda_2-4\lambda_3=0 & \\ -6\lambda_2+8\lambda_3=0 & L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{array}\right.\\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ 3\lambda_2-4\lambda_3=0\\ 0=0\end{array}\right.\\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\lambda_1=-\frac{11}{3}\lambda_3\\ \lambda_2=\frac{4}{3}\lambda_3\end{array}\right.
\end{array}$$

Il y a d'autres solutions que $(0,0,0)$ puisque l'on n'a pas de condition sur λ_3. En prenant par exemple $\lambda_3 = 3$ on obtient $\lambda_1 = -11$ et $\lambda_2 = 4$, donc on a $-11v_1 + 4v_2 + 3v_3 = 0$. La famille (v_1, v_2, v_3) est liée.

– Dans $K[X]$ la famille $(1, X, ..., X^n)$ est libre puisque

$$\lambda_0.1 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_n X^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

– Dans $K[X]$ la famille $(1, X, 3+2X)$ est liée puisque $3.1 + 2X - (3+2X) = 0$.

– Dans $\mathcal{M}_2(K)$ la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est libre :

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0\\ b = 0\\ c = 0\\ d = 0\end{cases}.$$

– Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la famille $(\cos, \sin)$ est libre. En effet, si $a\cos + b\sin = 0$ (où 0 désigne la fonction nulle), alors $a\cos(x) + b\sin(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$ cela donne $a = 0$ et pour $x = \pi/2$ cela donne $b = 0$.

Exercice 8

1) Montrer que la famille $(X^2 - 3X + 1, 2X^2 - X + 2, 3X^2 - 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

2) La famille (A, B, C) où $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}9 & 10\\11 & 12\end{pmatrix}$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

3) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{3x}$. Montrer que (f, g, h) est une famille libre de E.

Proposition 19 *Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans K et échelonnée en degré est libre.*

La famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degré (ou de degrés échelonnés) si $\deg P_1 < \ldots < \deg P_n$. Par exemple, la famille $(1, X+2, X^3 - 5X^2 + 2X - 3, X^4 + 2X + 3)$ est échelonnée en degré.

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur le nombre n de vecteurs de la famille.

Pour $n = 1$ le résultat est clair. Supposons la proposition vraie pour les familles de n polynômes, et soit $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in K$ tels que $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1} = 0$. On a $\deg(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n) \leqslant \deg(P_n) < \deg P_{n+1}$, donc si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $\deg(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1}) = \deg P_{n+1}$: impossible.

Ainsi $\lambda_{n+1} = 0$, et donc $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Par suite, la famille $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ est libre, ce qui achève la récurrence. □

• Propriétés

Proposition 20

(i) Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, elle est liée.

(ii) Si une famille de vecteurs contient deux fois le même vecteur, elle est liée.

Démonstration :

(i) La famille $(u_1, \ldots, u_n, 0)$ est liée car on peut écrire $0.u_1 + \ldots + 0.u_n + 1.0 = 0$.

(ii) La famille $(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \ldots, u_n)$ est liée car on peut écrire $0.u_1 + \ldots + 0.u_{i-1} + 1.v + 0.u_{i+1} + \ldots + 0.u_{j-1} + (-1).v + 0.u_{j+1} + \ldots + 0.u_n = 0$. □

Proposition 21

(i) Si on enlève un vecteur à une famille libre, elle reste libre.

(ii) Si on ajoute un vecteur à une famille liée, elle reste liée.

Démonstration :

(i) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre. Montrons que la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est libre également. Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1} = 0$. Alors on peut écrire que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1} + 0.u_n = 0$. Or la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

(ii) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille liée. Il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Soit v un vecteur. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est liée également car on peut écrire $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + 0.v = 0$. □

Proposition 22 *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration :
($\Rightarrow$) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille liée. Il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$.

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_j \neq 0$. Alors $\lambda_j u_j = -\lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_{j-1} u_{j-1} - \lambda_{j+1} u_{j+1} - \ldots - \lambda_n u_n$, donc $u_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} u_1 - \ldots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} u_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} u_{j+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_j} u_n$.

($\Leftarrow$) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs telle que u_j soit combinaison linéaire des autres vecteurs : $u_j = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{j-1} u_{j-1} + \alpha_{j+1} u_{j+1} + \ldots + \alpha_n u_n$. Alors $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{j-1} u_{j-1} + (-1).u_j + \alpha_{j+1} u_{j+1} + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ donc la famille est liée. □

Proposition 23 *Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre. Soit v un vecteur. Alors soit $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est libre, soit v est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.*

Démonstration :

Supposons que $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est liée. Il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + \lambda v = 0$. Si λ était nul, on aurait $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls, donc $(u_1, \ldots, u_n)$ serait liée : impossible. Par conséquent on a $\lambda \neq 0$ et donc $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} u_n$. □

2 Familles génératrices

Définition 8 *Soit E un K-espace vectoriel. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille* **génératrice de** *E si $E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.*

Autrement dit, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$:

$$\forall v \in E, \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n, v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Exemples :

– La famille (e_1, e_2) où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ puisque tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2.$$

– De même la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisque tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

– Reprenons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$.

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On veut écrire v sous la forme $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = v &\Leftrightarrow \alpha_1(-1, 0, 1) + \alpha_2(1, -1, 0) + \alpha_3(1, 1, 2) = (x, y, z) \\
&\Leftrightarrow (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3) = (x, y, z) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha_3 - y - z = x \\ \alpha_2 = \alpha_3 - y \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 + z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z \\ \alpha_2 = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z \\ \alpha_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases} .
\end{aligned}$$

Ainsi $v = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) u_1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z\right) u_2 + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z\right) u_3$.

On a donc montré que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 : la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Considérons maintenant la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, -4)$ et $v_3 = (1, -5, 9)$. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=v &\Leftrightarrow \alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(2,1,-4)+\alpha_3(1,-5,9)=(x,y,z)\\
&\Leftrightarrow (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2-5\alpha_3,\alpha_1-4\alpha_2+9\alpha_3)=(x,y,z)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=x\\ -\alpha_1+\alpha_2-5\alpha_3=y \quad L_2\leftarrow L_2+L_1\\ \alpha_1-4\alpha_2+9\alpha_3=z \quad L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=x\\ 3\alpha_2-4\alpha_3=x+y\\ -6\alpha_2+8\alpha_3=-x+z \quad L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=x\\ 3\alpha_2-4\alpha_3=x+y\\ 0=x+2y+z\end{cases}
\end{aligned}$$

On voit qu'il n'est pas toujours possible de résoudre le système : si $x+2y+z\neq 0$ alors il n'y a pas de solution. La famille (v_1,v_2,v_3) n'est donc pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

– La famille $(1,X,X^2)$ est une famille génératrice de $K_2[X]$ puisque tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 peut s'écrire $a.1+bX+cX^2$ avec $a,b,c\in K$.

Plus généralement la famille $(1,X,...,X^n)$ est une famille génératrice de $K_n[X]$ puisque tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut s'écrire $a_0.1+a_1X+\ldots+a_nX^n$ avec $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$.

– La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(K)$: toute matrice de $\mathcal{M}_2(K)$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

– La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}_2(K)$: toute matrice diagonale d'ordre 2 peut s'écrire

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Proposition 24 *Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, elle reste génératrice.*

Démonstration : Immédiat. □

Exercice 9 Montrer que la famille $(X+1,X+2)$ est une famille génératrice de $K_1[X]$.

3 Bases

Définition 9 *Soit E un K-espace vectoriel. Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une* **base** *de E si elle est libre et génératrice de E.*

Proposition 25 *$\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.*

Autrement dit, $\mathcal{B}=(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de E si et seulement si :

$$\forall\, v\in E,\ \exists\,!\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in K^n,\ v=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n.$$

On dit alors que les coefficients $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont les **coordonnées de v dans $\mathcal{B}$** et la matrice $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ est la **matrice des coordonnées de v dans $\mathcal{B}$**.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathcal{B}=(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de E. Elle est donc génératrice, et par définition tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_n$. Le problème est de montrer que cette écriture est unique.

Soit donc $v\in E$ et supposons que l'on ait $v=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n$ et $v=\beta_1u_1+\ldots+\beta_nu_n$. Alors $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n=\beta_1u_1+\ldots+\beta_nu_n$, donc $(\alpha_1-\beta_1)u_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)u_n=0$. Or la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre donc cela implique que $\alpha_1-\beta_1=\ldots=\alpha_n-\beta_n=0$, et donc que $\alpha_1=\beta_1$, …, $\alpha_n=\beta_n$.

($\Leftarrow$) Supposons que tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}=(u_1,\ldots,u_n)$. Alors $\mathcal{B}$ est évidemment génératrice. Reste à montrer qu'elle est libre.

Supposons donc que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. On peut aussi écrire que $0 = 0.u_1 + \ldots + 0.u_n$. On a ainsi deux écritures de 0 comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$. Or par hypothèse cette écriture est unique : on a donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Conclusion : la famille est libre. □

• Base canonique de K^n

Proposition 26 *La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ est une base de K^n.*

On dit que $\mathcal{B}$ est la **base canonique de** K^n.

Démonstration :
$\mathcal{B}$ est génératrice car tout élément de K^n peut s'écrire sous la forme $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

$\mathcal{B}$ est libre car $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. □

• Base canonique de $K_n[X]$

Proposition 27 *La famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.*

On dit que $\mathcal{B}$ est la **base canonique de** $K_n[X]$.

Démonstration :
$\mathcal{B}$ est génératrice car tout polynôme P de $K_n[X]$ peut s'écrire sous la forme $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n = a_0.1 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$.

$\mathcal{B}$ est libre car $\lambda_0.1 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_n X^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$. □

• Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1.

Par exemple, si $n = 2$ et $p = 3$ on a $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 28 *La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.*

On dit que c'est la **base canonique de** $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Démonstration :
Toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ peut s'écrire sous la forme $A = \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$: la famille (E_{ij}) est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

De plus, cette famille est libre puisque si $\displaystyle\sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij} = 0$ alors la matrice (λ_{ij}) est nulle, donc ses coefficients sont nuls.

La famille (E_{ij}) est donc une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. □

Par exemple, la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ est la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$. Toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ s'écrit de manière unique :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Sommes directes et bases

Proposition 29 *Soit E un K-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\mathcal{B}$ est une base de F, que $\mathcal{C}$ est une base de G et que F et G sont en somme directe, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de $F \oplus G$.*

On dit que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base **adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

Démonstration :
Soient $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{C} = (g_1, \ldots, g_q)$.
Montrons d'abord que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in K$ tels que $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$.
Alors $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = -(\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q) \in F \cap G$. Or $F \cap G = \{0\}$ donc $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = 0$ et $\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$. Mais $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont libres, donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$.

Montrons maintenant que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est génératrice de $F \oplus G$. Soit $x \in F \oplus G$. Alors on peut l'écrire sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$ tels que $u = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p$ et $\beta_1, \ldots, \beta_q \in K$ tels que $v = \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_q g_q$. On a donc $x = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_q g_q$. □

Réciproquement :

Proposition 30 *Soit E un K-espace vectoriel. Si la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre, alors* $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *et* $\text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *sont en somme directe.*

Démonstration :

Soient $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Montrons que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $x \in F \cap G$. Puisque $x \in F$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p$, et puisque $x \in G$, il existe $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $x = \alpha_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \alpha_n e_n$. Mais alors on a $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p - \alpha_{p+1} e_{p+1} - \ldots - \alpha_n e_n = 0$. Or la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre, donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = -\alpha_{p+1} = \ldots = -\alpha_n = 0$ et donc $x = 0$. □

IV Dimension d'un espace vectoriel

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 10 *On dit qu'un K-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice (finie).*

E est donc de dimension finie s'il existe une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E telle que $E = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Par exemple, d'après le paragraphe précédent, K^n, $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont de dimension finie. On verra que $K[X]$, $\mathcal{F}(K, K)$ et $K^{\mathbb{N}}$ ne le sont pas.

2 Théorème de la base incomplète

Théorème 31 *Soit E un K-espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Soient $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Autrement dit, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E en lui ajoutant certains vecteurs de $\mathcal{G}$.

Démonstration :

Soit A l'ensemble des familles libres de E incluses dans $\mathcal{G}$. Soit $B = \{\text{card}\, \mathcal{C} \,/\, \mathcal{C} \in A\}$.

Alors B est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (car $\mathcal{F} \in A$) et majorée (par $\text{card}\, \mathcal{G}$) donc elle admet un plus grand élément n_0. Soit $\mathcal{B} \in A$ telle que $\text{card}\, \mathcal{B} = n_0$ (autrement dit $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal maximal dans A). On va montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

$\mathcal{B}$ est évidemment libre puisqu'elle appartient à A. Montrons qu'elle est génératrice. Puisque $\mathcal{G}$ est elle-même génératrice, il suffit de montrer que ses éléments peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Soit $x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$. D'après la proposition 23, soit $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est libre, soit x est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Or $\mathcal{B} \cup \{x\}$ ne peut pas être libre sinon ce serait une famille de A de cardinal $n_0 + 1$: impossible. Par conséquent x est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. □

Corollaire 32 *(Théorème de la base extraite) Soit E un K-espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.*

Démonstration :

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Soit x un vecteur non nul de $\mathcal{G}$. Alors la famille (x) est libre, donc d'après le théorème précédent il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $(x) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. □

Théorème 33 *Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul possède une base.*

Démonstration : Il possède par définition une famille génératrice et on applique le corollaire précédent. □

Corollaire 34 *(Théorème de la base incomplète) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Alors toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.*

Démonstration :

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E. Par hypothèse E possède une famille génératrice $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est également une famille génératrice, donc d'après le théorème 31 il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. □

3 Dimension d'un espace vectoriel

On vient de voir que tout espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul possède des bases. On va montrer que toutes ces bases ont le même nombre d'éléments, et c'est ce cardinal commun à toutes les bases de E que l'on appellera **dimension de** E.

Lemme 35 *Si p vecteurs $y_1, \ldots, y_p$ sont combinaisons linéaires de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ avec $p > n$, alors la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est liée.*

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 1$: on suppose donc que $y_1 = \alpha_1 x_1$, ..., $y_p = \alpha_p x_1$ avec $p > 1$. Si $\alpha_1 = 0$ alors la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ contient le vecteur nul, donc elle est liée. Si $\alpha_1 \neq 0$, alors $y_p = \frac{\alpha_p}{\alpha_1} y_1$ donc la famille est liée également.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le lemme vrai au rang n et montrons qu'alors il est vrai au rang $n+1$. On suppose donc que $y_1, \ldots, y_p$ sont combinaisons linéaires de $n+1$ vecteurs $x_1, \ldots, x_{n+1}$ avec $p > n+1$:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n+1}x_{n+1} \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n+1}x_{n+1} \\ \vdots \\ y_p = \alpha_{p1}x_1 + \alpha_{p2}x_2 + \ldots + \alpha_{p,n+1}x_{n+1} \end{array}\right.$$

Si $\alpha_{11}, \alpha_{21} \ldots, \alpha_{p1}$ sont tous nuls, alors $y_1, \ldots, y_p$ sont combinaisons linéaires des n vecteurs $x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, donc par hypothèse de récurrence la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est liée.

Supposons maintenant que l'un des α_{k1} est non nul, par exemple α_{11}. En exprimant alors x_1 en fonction de $y_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dans la première ligne du système et en remplaçant dans les autres lignes on voit que l'on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} y_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}y_1 + \beta_{22}x_2 + \ldots + \beta_{2,n+1}x_{n+1} \\ \vdots \\ y_p = \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{11}}y_1 + \beta_{p2}x_2 + \ldots + \beta_{p,n+1}x_{n+1} \end{array}\right.$$

Ainsi les $p-1$ vecteurs $y_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}y_1, \ldots, y_p - \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{11}}y_1$ sont combinaisons linéaires des n vecteurs $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Or $p-1 > n$, donc, par hypothèse de récurrence, la famille $\left(y_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}y_1, \ldots, y_p - \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{11}}y_1\right)$ est liée.

Par conséquent il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_2\left(y_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}y_1\right) + \ldots + \lambda_p\left(y_p - \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{11}}y_1\right) = 0$, d'où $\frac{-\lambda_2\alpha_{21} - \ldots - \lambda_p\alpha_{p1}}{\alpha_{11}}y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_p y_p = 0$: la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est donc liée, et la récurrence est achevée. □

Théorème 36 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce cardinal commun est appelé* **dimension de** E *et noté* $\dim E$.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ deux bases de E. On veut montrer que $n = p$.

Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, les vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ sont combinaisons linéaires de $e_1, \ldots, e_n$. Si on avait $p > n$, alors d'après le lemme $\mathcal{C}$ serait liée : impossible (c'est une base). Par conséquent $p \leqslant n$.

De même, puisque $\mathcal{C}$ est une base de E, les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$. Si on avait $n > p$, alors d'après le lemme $\mathcal{B}$ serait liée : impossible (c'est une base). Par conséquent $n \leqslant p$.

On a donc bien $n = p$. □

Remarque : Par convention, si $E = \{0_E\}$, alors on pose $\dim E = 0$.

Exemples :

1. On a vu que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ est une base de K^n. Comme elle est formée de n vecteurs, on a :

Proposition 37 $\dim K^n = n$.

2. On a vu que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$. Comme elle est formée de $n+1$ vecteurs, on a :

Proposition 38 $\dim K_n[X] = n + 1$.

3. On a vu que la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Elle est formée de $n \times p$ vecteurs, donc :

Proposition 39 $\dim \mathcal{M}_{n,p}(K) = n \times p$.

4 Familles libres et familles génératrices en dimension finie

Proposition 40 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors* $\operatorname{card} \mathcal{F} \geqslant n$. *Si, de plus,* $\operatorname{card} \mathcal{F} = n$, *alors $\mathcal{F}$ est une base de E.*

Démonstration :

D'après le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B}$ de E : on a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Puisque $\dim E = n$ alors $\operatorname{card} \mathcal{B} = n$, et donc $\operatorname{card} \mathcal{F} \geqslant n$. De plus, il y a égalité si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. □

Proposition 41 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors* $\operatorname{card} \mathcal{F} \leqslant n$. *Si, de plus,* $\operatorname{card} \mathcal{F} = n$, *alors $\mathcal{F}$ est une base de E.*

Démonstration :

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B}$ de E : on a donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Puisque $\dim E = n$ alors $\operatorname{card} \mathcal{B} = n$, et donc $\operatorname{card} \mathcal{F} \leqslant n$. De plus, il y a égalité si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. □

Application : en dimension finie, pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre *ou* qu'elle est génératrice, et que son cardinal est égal à la dimension de l'espace (en général il est plus simple de montrer qu'elle est libre).

Exemple qu'on rencontrera fréquemment : soient $P_0, \ldots, P_n$ des polynômes de $K[X]$ tels que $\deg P = i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Alors la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degrés, donc elle est libre, et de cardinal $n+1$ égal à la dimension de $K_n[X]$, donc c'est une base de $K_n[X]$.

Exercice 10 On considère les polynômes $P_1 = X^2 - X + 4$, $P_2 = 2X^2 + X + 3$ et $P_3 = -X^2 + 2X + 5$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

V Dimension d'un sous-espace vectoriel

1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 42 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$. *Si, de plus,* $\dim F = \dim E$, *alors $F = E$.*

Démonstration :

Si F est réduit au vecteur nul, c'est immédiat. Supposons $F \neq \{0\}$.

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 31, on montre qu'il existe dans F une famille libre $\mathcal{F}$ de cardinal maximal. Tout $x \in F$ peut alors s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ (sinon $\mathcal{F} \cup \{x\}$ serait libre), donc $\mathcal{F}$ est génératrice de F : c'est une base de F, qui est donc de dimension finie.

De plus, $\mathcal{F}$ est également libre dans E donc son cardinal est inférieur à la dimension de E, avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E. Autrement dit, $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$. □

Application : pour montrer que deux K-espaces vectoriels E et F *de dimensions finies* sont égaux, il suffit de montrer que $E \subset F$ et que $\dim E = \dim F$ (il n'est alors pas nécessaire de montrer que $F \subset E$).

Définition 11 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Une* **droite vectorielle de** *E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. Un* **plan vectoriel de** *E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2. Un* **hyperplan de** *E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.*

Exercice 11

1) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

2) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0 \text{ et } 2x + y - 4z + 3t = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

2 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Proposition 43 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.*

Autrement dit, en dimension finie, tout sous-espace admet un supplémentaire (qui n'est évidemment pas unique).

Démonstration :

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. C'est donc une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base de E $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors, d'après la proposition 30, $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et F sont supplémentaires. □

Proposition 44 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E. Alors* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration : Conséquence immédiate de la proposition 29. □

Proposition 45 *(Formule de Grassmann) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration :

On va se ramener au cas des sous-espaces supplémentaires. Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (F_1 existe d'après la proposition 43). On va montrer que F_1 est un supplémentaire de G dans $F + G$.

Montrons d'abord que $F_1 \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F_1 \cap G$. Alors $x \in F \cap G$ puisque $F_1 \subset F$. Or $(F \cap G) \cap F_1 = \{0\}$, donc $x = 0$.

Montrons maintenant que $F + G = F_1 + G$. Soit $x = u + v \in F + G$ (avec $u \in F$ et $v \in G$). Puisque $F = F_1 + (F \cap G)$, on peut écrire u sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F \cap G$. On a donc $x = u_1 + u_2 + v = u_1 + (u_2 + v)$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 + v \in G$. Par conséquent $x \in F_1 + G$.

On a donc bien $F + G = F_1 \oplus G$. Par conséquent $\dim(F + G) = \dim F_1 + \dim G$. Or $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ donc $\dim F = \dim F_1 + \dim(F \cap G)$, d'où $\dim F_1 = \dim F - \dim(F \cap G)$, et donc finalement $\dim(F + G) = \dim F - \dim(F \cap G) + \dim G$. □

Exercice 12 On reprend les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ de l'exercice 11. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Proposition 46 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = F + G \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{array} \right. .$$

Démonstration :

Notons (i), (ii), (iii) et (iv) les quatre propositions. On a déjà vu que (i) et (ii) sont équivalentes.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0\}$. Alors, par la formule de Grassmann, $\dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$ puisque $\dim(F \cap G) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Supposons que $E = F + G$ et que $\dim E = \dim F + \dim G$. Alors, par la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = \dim E - \dim E = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que $F \cap G = \{0\}$ et que $\dim E = \dim F + \dim G$. Alors, par la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim E$. Puisque $F + G$ est un sous-espace de E, on en déduit que $F + G = E$ (cf proposition 35). □

Remarque : En général, il est plus simple de montrer que $F \cap G = \{0\}$ plutôt que $E = F + G$.

Exercice 13 Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, \int_0^1 P(t)dt = 0\right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, en déterminer une base, et montrer qu'ils sont supplémentaires.

3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 12 *Soit E un K-espace vectoriel. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Le* **rang** *de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. On le note $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n)$.*

Autrement dit $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$.

Remarque : La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si son rang est égal à n. Sinon le rang de $(u_1, \ldots, u_n)$ est le cardinal de la famille libre maximale que l'on peut extraire de $(u_1, \ldots, u_n)$.

Proposition 47 *On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs :*

(i) en changeant l'ordre de ses vecteurs,

(ii) en multipliant l'un de ses vecteurs par un scalaire non nul,

(iii) en ajoutant à l'un de ses vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration :

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs. On va en fait montrer que les opérations ci-dessus ne modifient pas $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

(i) Échange de u_i et u_j : on a évidemment $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.

(ii) Multiplication de u_i par $\lambda \neq 0$: on a $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n)$ car tout vecteur $x = a_1u_1 + \ldots + a_iu_i + \ldots + a_nu_n$ peut s'écrire $x = a_1u_1 + \ldots + \frac{a_i}{\lambda}(\lambda u_i) + \ldots + a_nu_n$ et inversement tout vecteur $x = a_1u_1 + \ldots + a_i(\lambda u_i) + \ldots + a_nu_n$ peut s'écrire $x = a_1u_1 + \ldots + (\lambda a_i)u_i + \ldots + a_nu_n$.

(iii) Ajout à u_i de $\sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$: on a $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j, \ldots, u_n)$ car tout vecteur $x = a_1u_1 + \ldots + a_iu_i + \ldots + a_nu_n$ peut s'écrire $x = (a_1 - \lambda_1 a_i)u_1 + \ldots + a_i(u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j) + \ldots + (a_n - \lambda_n a_i)u_n$ et inversement tout vecteur $x = a_1u_1 + \ldots + a_i(u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j) + \ldots + a_nu_n$ peut s'écrire $x = (a_1 + \lambda_1 a_i)u_1 + \ldots + a_iu_i + \ldots + (a_n + \lambda_n a_i)u_n$. □

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, on écrit la matrice dont les colonnes sont formées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de la famille, et on applique la méthode du pivot de Gauss. Le rang de la famille est égal au nombre de pivots de la matrice échelonnée obtenue.

Exercice 14 Déterminer le rang de la famille (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ où $P_1 = X^2+X+1$, $P_2 = X^2-1$, $P_3 = aX^2+bX+c$.