# Correction du DNS 19

1) a) Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k} \geqslant \frac{1}{k^2}$$

car $k^2 - k \leqslant k^2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

La suite $(s_n)$ est donc majorée par 2.

c) La suite $(s_n)$ est croissante : en effet, $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$. Comme elle est également majorée, on en déduit qu'elle converge. De plus, on a $s_n \leqslant 2$ pour tout $n$, donc $S = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \leqslant 2$.

2) a) Pour tout réel $\varphi \not\equiv 0\,[\pi]$,

$$\cot^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1.$$

b) Étudions les variations de la fonction cot sur $]0, \pi[$. Elle est dérivable sur cet intervalle, et, pour tout $x$,

$$\cot'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

La fonction cot est donc strictement décroissante sur $]0, \pi[$. De plus elle est continue, donc elle définit une bijection de $]0, \pi[$ dans $\cot(]0, \pi[) = \mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \cot x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pi} \cot x = -\infty$).

3) a) On a $e^{in\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$. On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\cos \varphi)^{n-j} (i \sin \varphi)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^j (\cos \varphi)^{n-j} (\sin \varphi)^j.$$

b) Pour $n = 2p+1$, la formule précédente s'écrit

$$e^{i(2p+1)\varphi} = \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} i^j (\cos \varphi)^{2p+1-j} (\sin \varphi)^j.$$

Or $\sin((2p+1)\varphi)$ est la partie imaginaire de $e^{i(2p+1)\varphi}$, et dans la somme les termes associés à $j$ pair sont réels ($i^j = 1$ ou $-1$) et ceux associés à $j$ impair sont imaginaires purs ($i^j = i$ ou $-i$). On ne prend donc que les termes impairs de la somme. En posant $j = 2k+1$, on obtient

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} i^{2k} (\cos \varphi)^{2p+1-2k-1} (\sin \varphi)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k (\cos \varphi)^{2p-2k} (\sin \varphi)^{2k+1}.$$

Si $\varphi \not\equiv 0[\pi]$, on peut mettre $(\sin \varphi)^{2p+1}$ en facteur. On obtient

$$\begin{aligned}
\sin((2p+1)\varphi) &= (\sin \varphi)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k (\cos \varphi)^{2p-2k} (\sin \varphi)^{2k-2p} \\
&= (\sin \varphi)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^{2p-2k} \\
&= (\sin \varphi)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k (\cot \varphi)^{2p-2k} \\
&= (\sin \varphi)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k \left( \cot^2 \varphi \right)^{p-k}.
\end{aligned}$$

4) a) Notons d'abord que si $k \in \{1, \dots, p\}$ alors $0 < \dfrac{k}{2p+1} < \dfrac{1}{2}$ donc $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cot\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right) > 0$.

Soient $k, k' \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $\gamma_k = \gamma_{k'}$, i.e. $\cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \cot^2\left(\frac{k'\pi}{2p+1}\right)$. Alors $\cot\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \cot\left(\frac{k'\pi}{2p+1}\right)$ car ce sont des réels positifs. Or on a vu que la fonction cot définit une bijection de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ donc $\frac{k\pi}{2p+1} = \frac{k'\pi}{2p+1}$ et donc $k = k'$. Cela montre que les $\gamma_k$ sont deux à deux distincts.

b) Pour tout entier $\ell \in \{1, \ldots, p\}$, d'après la question 3)b),

$$P(\gamma_\ell) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\cot^2 \frac{\ell\pi}{2p+1}\right)^{p-k} = \frac{\sin\left((2p+1)\frac{\ell\pi}{2p+1}\right)}{\left(\sin\frac{\ell\pi}{2p+1}\right)^{2p+1}} = \frac{\sin(\ell\pi)}{\left(\sin\frac{\ell\pi}{2p+1}\right)^{2p+1}} = 0.$$

c) Le polynôme $P$ est de degré $p$, donc il a au plus $p$ racines réelles. Or les $\gamma_k$ sont racines de $P$, d'après la question précédente, et il y en a $p$. Les racines de $P$ sont donc les $\gamma_k$ avec $k \in \{1, \ldots, p\}$.

d) On va appliquer le théorème sur la somme des racines d'un polynôme scindé. Le coefficient dominant de $P$ est

$$(-1)^0 \binom{2p+1}{1} = 2p+1.$$

Son coefficient devant $X^{p-1}$ est

$$(-1)^1 \binom{2p+1}{3} = -\frac{(2p+1)!}{3!(2p-2)!} = -\frac{(2p-1)(2p)(2p+1)}{6} = -\frac{p(2p-1)(2p+1)}{3}.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1} = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_p = -\frac{-\frac{p(2p-1)(2p+1)}{3}}{2p+1} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

Pour la deuxième égalité, on utilise la relation entre cot et sin établie en 1)a) :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} (1 + \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1}) = p + \sum_{k=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1} = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

5) a) Étudions les fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0, \pi/2[$ respectivement par $f(\varphi) = \sin\varphi - \varphi$ et $g(\varphi) = \tan\varphi - \varphi$. Elles sont dérivables sur $]0, \pi/2[$ et pour tout $\varphi \in ]0, \pi/2[$

$$f'(\varphi) = \cos\varphi - 1 < 0 \quad \text{et} \quad g'(\varphi) = 1 + \tan^2\varphi - 1 = \tan^2\varphi > 0.$$

La fonction $f$ est donc strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $\varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f(\varphi) < 0$, soit $\sin\varphi < \varphi$.

De même, la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $\varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $g(\varphi) > 0$, soit $\tan\varphi > \varphi$.

On pouvait aussi utiliser la concavité de sin et la convexité de tan sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Pour tout $\varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$, donc $\sin^2\varphi < \varphi^2 < \tan^2\varphi$, d'où $\frac{1}{\sin^2\varphi} < \frac{1}{\varphi^2} < \cot^2\varphi$.

Pour $\varphi = \frac{k\pi}{2p+1}$, qui appartient bien à $]0, \frac{\pi}{2}[$ lorsque $p \in \{1, \ldots, p\}$, cet encadrement devient

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2 k^2} < \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} < \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p+1)^2}{\pi^2 k^2} < \sum_{k=1}^{p} \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1}$$

soit

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.$$

c) L'encadrement précédent donne $\dfrac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$.

Or $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (équivalents), donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$