Fiche d'exercices : Espaces vectoriels

Exercice 1 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+1\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 0\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

Exercice 2 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. l'ensemble des suites qui tendent vers 0,
2. l'ensemble des suites qui tendent vers 1,
3. l'ensemble des suites divergentes,
4. l'ensemble des suites bornées,
5. l'ensemble des suites non nulles,
6. l'ensemble des suites stationnaires.

Exercice 3 Les sous-ensembles de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

1. l'ensemble des fonctions constantes,
2. l'ensemble des fonctions convexes,
3. l'ensemble des fonctions polynomiales,
4. l'ensemble des fonctions 2π-périodiques.

Exercice 4 Les sous-ensembles de $K[X]$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $K[X]$?

1. $\{P \in K[X] \mid P(1) = P(2)\}$
2. $\{P \in K[X] \mid \deg P \geqslant 2\}$
3. $\{P \in K[X] \mid X^2+1 \text{ divise } P\}$
4. $\{P \in K[X] \mid \deg P \text{ pair}\} \cup \{0\}$

Exercice 5 Les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1. l'ensemble des matrices diagonales,
2. l'ensemble des matrices triangulaires supérieures,
3. l'ensemble des matrices symétriques,
4. l'ensemble des matrices antisymétriques,
5. l'ensemble des matrices inversibles,
6. l'ensemble des matrices non inversibles,
7. l'ensemble des matrices de trace nulle,
8. l'ensemble des matrices nilpotentes.

Exercice 6 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (-1,2,1)$ et $w = (7,2,9)$. Le vecteur w appartient-il à $\mathrm{Vect}(u,v)$?

Exercice 7 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (3,2,1)$, $v = (0,-1,4)$ et $w = (1,0,2)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \mathrm{Vect}(v,w)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 Montrer que l'ensemble des fonctions affines et l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = f'(0) = 0$ sont supplémentaires dans $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 9 Soit $E = K_n[X]$ et soit A un polynôme de degré m avec $0 < m \leqslant n$. Soit F l'ensemble des polynômes P de E tels que A divise P. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus K_{m-1}[X]$.

Exercice 10 Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Soit F l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0. Montrer que E est un espace vectoriel, que F est un sous-espace vectoriel de E, et trouver un supplémentaire de F dans E.

Exercice 11 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de F dans E.

2) Même question avec $F = \{f \in E \mid f(a) = f(b) = 0\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$.

3) Soient $F = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f(b) = 0\}$ avec $a \neq b$. Montrer que $E = F + G$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 12 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ forment-elles une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 13 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & \lambda & \mu \\ -9 & 10 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer λ et μ pour que la famile (A,B,C) soit liée.

Exercice 14 Les familles de fonctions suivantes sont-elles libres ou liées dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

1. $(x \mapsto \operatorname{ch} x, x \mapsto \operatorname{sh} x, x \mapsto e^x)$.
2. $(x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \operatorname{sh} x, x \mapsto \operatorname{ch} x)$.
3. $(x \mapsto e^{\alpha x}, x \mapsto e^{\beta x}, x \mapsto e^{\gamma x})$ (avec α, β et γ des réels deux à deux distincts).
4. $(x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin(x+\theta), x \mapsto \cos(x+\theta))$ (où θ est un réel fixé).

Exercice 15

1) Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,2)$ et $u_3 = (1,2,3)$. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les coordonnées de $v = (5,-1,3)$ dans cette base.

Exercice 16 On considère les polynômes $P_1 = X^2+3X-2$, $P_2 = X^2+X+1$ et $P_3 = X^2-1$.

1) Montrer que (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminer les coordonnées de $P = aX^2+bX+c$ dans cette base.

Exercice 17 Les familles suivantes sont-elles libres, liées, génératrices de $\mathbb{R}^3$? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,2,3))$
2. $((1,2,3),(4,5,6))$
3. $((1,2,3),(4,5,6),(0,0,0))$
4. $((1,2,3),(4,5,6),(2,4,6))$
5. $((1,2,3),(0,4,5),(0,0,6))$
6. $((1,0,1),(0,1,1),(1,1,2))$
7. $((1,2,3),(0,4,5),(0,0,6),(7,8,9))$
8. $((1,0,1),(0,1,1),(1,1,2),(0,1,0))$

Exercice 18 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (2,3,4)$ et $w = (4,5,a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille (u,v,w) est-elle libre, liée, génératrice, une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 19 Soit (u, v, w) une base d'un K-espace vectoriel E. Montrer que la famille $(u + v, v + w, w + u)$ est aussi une base de E.

Exercice 20 Montrer que la famille $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $K_n[X]$.

Exercice 21 Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. La famille $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1)$ est-elle libre ?

Exercice 22 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{a_i x})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 23 Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \text{ et } x + y + 3z = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 3z = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$.
6. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0\}$.
7. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0 \text{ et } t = 0\}$.
8. $E = K_2[X]$ et $F = \{P \in K_2[X] \mid P(1) + P(2) = 0\}$.
9. $E = K_3[X]$ et $F = \{P \in K_3[X] \mid P(1) + P(2) = 0\}$.
10. $E = K_3[X]$ et $F = \{P \in K_3[X] \mid P(0) = P'(0) \text{ et } P(1) = P'(1)\}$.
11. $E = K_2[X]$ et $F = \mathrm{Vect}(X, X + 1, X + 2)$.
12. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{\begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ a-3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
13. $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0\}$.
14. $E = F = \mathbb{C}$ (distinguer selon que $\mathbb{C}$ est considéré comme espace vectoriel réel ou complexe).
15. $E = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{R}$ (idem).
16. $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{y \in E \mid ay'' + by' + cy = 0\}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Exercice 24 Montrer que les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(K)$ suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$ et déterminer leurs dimensions.

1. l'ensemble $\mathcal{D}_n(K)$ des matrices diagonales,
2. l'ensemble $\mathcal{T}_n^s(K)$ des matrices triangulaires supérieures,
3. l'ensemble $\mathcal{S}_n(K)$ des matrices symétriques,
4. l'ensemble $\mathcal{A}_n(K)$ des matrices antisymétriques.

Exercice 25 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 26 Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux espaces vectoriels sur K. On munit $E \times F$ des lois $+$ et $.$ définies par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha.(x, y) = (\alpha.x, \alpha.y)$, où x, $x' \in E$, y, $y' \in F$ et $\alpha \in K$.

1) Montrer que $(E \times F, +, .)$ est un K-espace vectoriel.

2) Montrer que si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ aussi, et déterminer sa dimension.

Exercice 27

1) Soient les ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + z = 0 \text{ et } x - 2y + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y = 0\}$.

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de F et une base de G.

b) F et G sont-ils supplémentaires ?

c) Déterminer une base de $F \cap G$ et une base de $F + G$.

2) Mêmes questions avec $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0 \text{ et } 3x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 5y + 5z - t = 0 \text{ et } 2x - y + 2z - t = 0\}$.

3) Mêmes questions avec $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(a, b, a + b, a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 28 Dans $\mathbb{R}^5$ on considère les vecteurs $a = (-1, 1, 2, 1, -1)$, $b = (0, 1, 0, 2, 0)$, $c = (1, 1, 2, 1, 1)$ et $d = (1, 2, 4, 2, 1)$. Soient $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, d)$.

1) F et G sont-ils supplémentaires ?

2) Déterminer les dimensions de $F + G$ et de $F \cap G$ et en donner des bases.

Exercice 29 Dans chacun des cas suivants, montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E = K_3[X]$, déterminer leurs dimensions et étudier $F + G$ et $F \cap G$.

1. $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P'(2) = 0\}$.
2. $F = \{P \in E \mid P(1 - X) = P(X)\}$, $G = \{P \in E \mid P(1 - X) = -P(X)\}$.

Exercice 30 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 31 Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ (P_1, P_2, P_3, P_4) où $P_1 = -8X^3 + 5X^2 + 3X + 4$, $P_2 = X^3 + 2X^2 - 3X + 1$, $P_3 = X^3 + 9X^2 - 10X + 5$ et $P_4 = -2X^3 + 3X^2 - X + 2$.

Exercice 32 Soient a et b deux réels et soient $u = (a, b)$ et $v = (a+2b, 2a+b)$. Déterminer le rang de la famille (u, v).

Exercice 33 Soit a un réel et soient $u = (a, -a, 1)$, $v = (a+1, a-1, a-1)$ et $w = (2a, a, -1)$. Déterminer le rang de la famille (u, v, w).