

# Chapitre 20 : Mouvement d'un solide

## 1 Description du mouvement d'un solide

### 1.1 Définition

Un solide est un système matériel indéformable. Par conséquent :

- Tous les points d'un solide sont immobiles les uns par rapport aux autres,
- La distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante, quelque soit le mouvement du solide.

### 1.2 Degré des liberté

Chaque direction indépendante selon laquelle une translation est possible constitue un **degré de liberté de translation**.

Chaque direction indépendante selon laquelle une rotation est possible constitue un **degré de liberté de rotation**.

**Rq :** Le nombre de degrés de liberté d'un système correspond au nombre minimal de coordonnées indépendantes nécessaires pour repérer son mouvement.

Un solide possède six degrés de liberté : trois de translation et trois de rotation. Par conséquent, **la position de tous les points d'un solide est entièrement déterminée par la donnée de six coordonnées**.

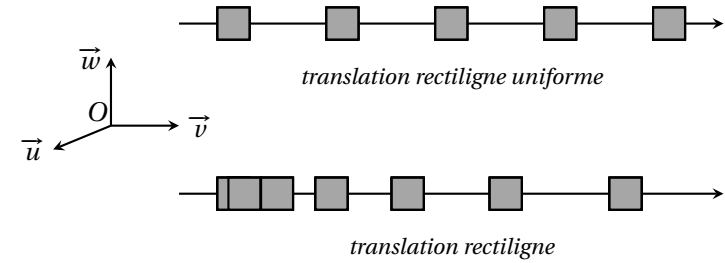
### 1.3 Translation

Un solide étant indéformable, on peut lui associer un repère orthonormé direct, qui n'est pas forcément celui lié au référentiel d'étude.

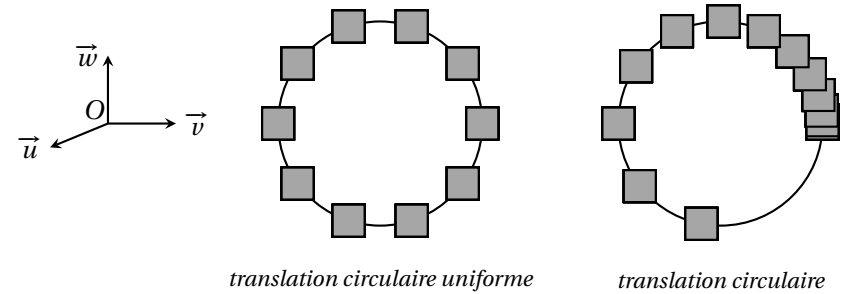
Un solide est en translation dans un référentiel donné si et seulement si **tous ses points ont le même vecteur vitesse**. Dans le cas d'une translation, les axes du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.

Dans le cas particulier de la translation, le mouvement du solide est entièrement décrit par le mouvement d'un de ses points.

#### 1.3.1 Translation rectiligne



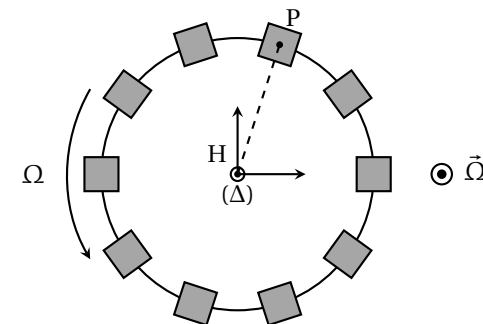
#### 1.3.2 Translation circulaire



#### 1.4 Rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'il existe une unique droite  $\Delta$  immobile à la fois par rapport au solide et à  $\mathcal{R}$ .

Dans un mouvement de rotation, tous les points du solide effectuent un mouvement **circulaire** autour de  $\Delta$  à la même vitesse angulaire  $\Omega$ .



rotation uniforme autour de  $(\Delta)$

Dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, on peut montrer que la vitesse de tout point du solide est donnée par la relation :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = r\omega\vec{u}_\theta$$

Où  $\vec{\omega}$  est appelé vecteur rotation instantanée du solide et défini par :

- sa norme :  $\omega$ , la vitesse angulaire commune à tous les points du solide,
- sa direction : il est colinéaire à l'axe de rotation,
- son sens : il est donné par la règle du produit vectoriel. On remarque qu'il est tel que  $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega})$  forme un trièdre direct.

## 2 Solide en rotation autour d'un axe fixe

### 2.1 Moment d'inertie

Un système ( $\mathcal{S}$ ) indéformable constitué de  $N$  points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$  est en rotation autour d'un axe orienté  $(\Delta)$ , à la vitesse angulaire (algébrique)  $\omega$ . On note  $r_i$  la distance du point  $M_i$  à l'axe. Le moment cinétique de ce solide par rapport à  $(\Delta)$  s'écrit sous la forme :

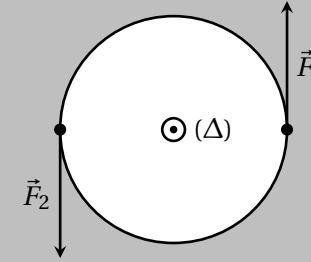
$$L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta \omega \quad \text{avec} \quad J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$$

où  $J_\Delta$  s'appelle le **moment d'inertie** du solide par rapport à  $(\Delta)$ . Il caractérise l'inertie mécanique d'un système qu'on veut mettre en rotation autour d'un axe. Il s'agit d'une grandeur additive (si l'on réunit deux solides, le moment d'inertie de l'ensemble est égal à la somme des moments d'inertie de chaque solide pris séparément). On admet que cette expression se généralise à tout solide et on donne quelques exemples de moments d'inertie classiques :

Masse ponctuelle	Tige rectiligne homogène / médiatrice	Disque homogène / axe de symétrie de révolution	Boule homogène / axe de symétrie
$J_\Delta = mr^2$	$J_\Delta = \frac{mL^2}{3}$	$J_\Delta = \frac{mR^2}{2}$	$J_\Delta = \frac{2mR^2}{5}$

### 2.2 Couple de force

Def : Considérons un système sur lequel s'exercent un ensemble de force **dont la résultante est nulle** mais dont le moment résultant par rapport à un axe orienté est non nul.



On appelle **couple de force** le moment résultant de cet ensemble de force :

$$\Gamma = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Un couple qui a pour effet d'augmenter la vitesse angulaire en valeur absolue est appelé **couple moteur**.

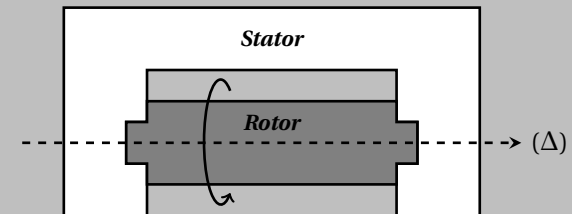
Un couple qui a pour effet de diminuer la vitesse angulaire en valeur absolue est appelé **couple résistant** ou **couple de freinage**.

**Rq** : Par définition un couple de forces appliqué par exemple à un solide ne provoque aucun mouvement de translation (résultante des forces nulle) mais uniquement un mouvement de rotation autour de  $(\Delta)$  (moment résultant non nul).

### 2.3 Liaison pivot

Une liaison assure une jonction entre deux éléments d'un système mécanique. On distingue les différents types de liaison suivant les degrés de libertés (de translation et/ou de rotation) qu'elles laissent aux éléments mobiles. Dans ce chapitre on s'intéresse à une liaison entre un élément fixe (dans le référentiel d'étude), appelé **stator**, et un élément en rotation autour d'un axe fixe, appelé **rotor**.

Def : On appelle **liaison pivot** une liaison qui contraint le rotor à ne posséder qu'un seul degré de liberté de rotation autour d'un axe fixe (ex : tambour de machine à laver).



Une liaison pivot prive le rotor de ses degrés de liberté de translation, ce qui signifie que la résultante des forces de liaison est non nulle (elles compensent le poids et d'éventuelles vibrations du rotor). Il existe inévitablement des frottements mécaniques au niveau de la surface de contact entre l'axe et le solide qui s'opposent à la rotation et produisent un **couple de freinage** ( $\mathcal{M}_\Delta$  (liaison) de signe opposé à  $\Omega$ ). Toutefois, on peut réduire ces frottements avec un peu d'astuce (lubrification, utilisation d'engrenages ou de roulements à billes). Dans ce cas, on pourra utiliser le modèle simplifié de la **liaison pivot idéale**, telle que le moment résultant des actions de liaison par rapport à l'axe de rotation est nul.

$$\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison}) = 0$$

## 2.4 TMC appliqué à un solide en rotation autour d'un axe orienté ( $\Delta$ ) fixe dans un référentiel galiléen

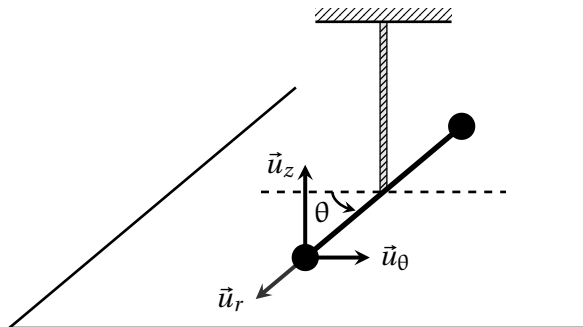
Soit ( $\mathcal{S}$ ) un solide soumis à un ensemble de forces extérieures et/ou de couples, et ( $\Delta$ ) un axe orienté fixe dans un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à ( $\mathcal{S}$ ), par rapport à ( $\Delta$ ) s'énonce de la manière suivante :

$$\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})}{dt} = J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \sum [\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}}) + \Gamma_{\text{ext}}]$$

## 3 Applications

### 3.1 Pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué d'une tige attachée à un fil de torsion ( $Oz$ ) vertical qui exerce sur la tige un couple de rappel  $\Gamma = -C\theta$  lorsqu'on lui impose une torsion d'angle  $\theta$  par rapport à sa position d'équilibre. On note  $J_z$  le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe ( $Oz$ ).



Le TMC appliqué à la masse permet d'obtenir l'équation du mouvement du pendule :

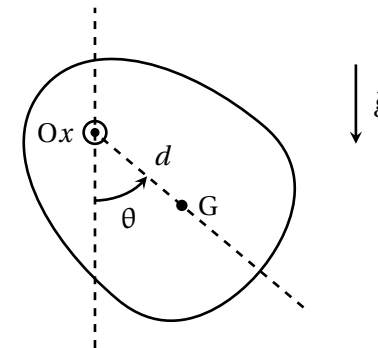
$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_z} \theta = 0$$

La tige effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre avec la pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_z}}$$

### 3.2 Pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'un solide ( $\mathcal{S}$ ) de masse  $m$ , de forme quelconque, mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ( $Ox$ ) ne passant pas par son centre d'inertie  $G$ . La liaison pivot entre le solide et l'axe de rotation est supposée parfaite. On note  $d = OG$  et  $J_x$  le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.



L'équation du mouvement du pendule pesant s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_x} \sin \theta = 0$$

Dans l'approximation des petits angles, le pendule pesant effectue des oscillations harmoniques de pulsation:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_x}}$$

## 4 Énergie cinétique d'un solide en rotation

### 4.1 Énergie cinétique d'un système de $N$ points matériels

Un système ( $\mathcal{S}$ ) est constitué de  $N$  points matériels de masses  $m_i$  et de vitesses  $\vec{v}_i$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Par définition, l'énergie cinétique de ce système est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des constituants de ce système.

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

### 4.2 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

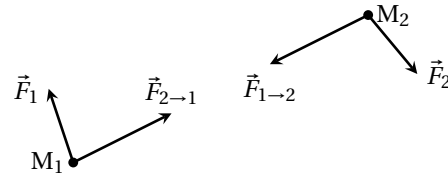
Un solide est en rotation autour d'un axe ( $\Delta$ ), fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. On note  $J_\Delta$  le moment d'inertie de ce solide par rapport à ( $\Delta$ ) et  $\omega$  la vitesse de rotation du solide autour de ( $\Delta$ ), dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . L'énergie cinétique du solide (dans  $\mathcal{R}$ ) s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

## 5 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

### 5.1 Cas d'un système de deux points matériels

On considère un système ( $\mathcal{S}$ ) constitué de deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$  en interaction. On note  $\vec{F}_1$  (respectivement  $\vec{F}_2$ ) la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur  $M_1$  (respectivement  $M_2$ ) et  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  (respectivement  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ ) la force exercée par  $M_2$  sur  $M_1$  (respectivement par  $M_1$  sur  $M_2$ ).



Le théorème de la puissance cinétique appliqué à ( $\mathcal{S}$ ) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

- $\mathcal{P}_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1$  et  $\mathcal{P}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2$  sont les puissances des forces extérieures au système
- $\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2$  est la puissance des forces intérieures.

Si le système ( $\mathcal{S}$ ) est indéformable (distance  $M_1 M_2$  constante) alors **la puissance des forces intérieures est nulle.**

### 5.2 Cas d'un système de $N$ points matériels

Les résultats obtenus précédemment se généralisent au cas d'un nombre  $N$  quelconque de points matériels :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Où la puissance des forces intérieures est nulle si le système est indéformable, ce qui est notamment le cas des solides. Le théorème de la puissance cinétique appliqué à un **solide** soumis à un ensemble de forces extérieures  $\vec{F}_i$  s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

On retient que  $\vec{v}_i$  est la **vitesse du point d'application de la force  $\vec{F}_i$** . Par intégration entre deux points A et B d'une trajectoire, on obtient le théorème de l'énergie cinétique :

$$\int_A^B \frac{dE_c}{dt} dt = \sum_i W(\vec{F}_i) = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i$$

### 5.3 Application : énergie potentielle de pesanteur d'un solide

Le théorème de la puissance cinétique appliqué à un solide de masse totale  $m$  en chute libre permet de démontrer que l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit (à une constante près) sous la forme :

$$E_p = mgz_G$$

où  $z_G$  est le **centre d'inertie** du solide.

### 5.4 Équivalence entre le TEC et le TMC par rapport à ( $\Delta$ ) : expression de la puissance d'une action extérieure sur un solide en rotation autour d'un axe

Le théorème de l'énergie cinétique contient exactement la même information que le théorème du moment cinétique. On utilisera l'un ou l'autre suivant qu'il est plus adapté à la situation étudiée. On montre à cette occasion que la puissance d'une force extérieure s'exerçant sur un solide en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \omega \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

## 5.5 Application : énergie potentielle d'un couple de rappel élastique

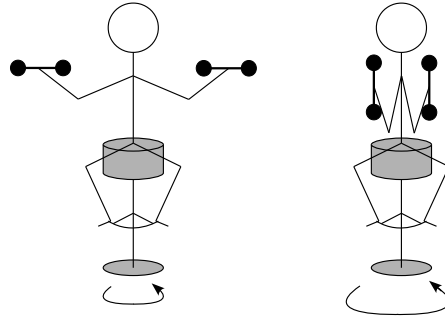
Le théorème de la puissance cinétique appliqué au pendule de torsion permet de retrouver de manière très rapide l'équation du mouvement. On profite de cette étude pour mettre en évidence la caractère conservatif de l'action de torsion du fil sur le pendule. On peut définir une énergie potentielle associée au couple de torsion, qui s'écrit (à une constante près) sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$$

## 5.6 Système déformable : étude du tabouret d'inertie

Un tabouret d'inertie est un tabouret lié à son axe de rotation par une liaison pivot idéale. Le moment du poids d'une personne assise sur le tabouret est nul car colinéaire à l'axe de rotation. Le mouvement d'une personne assise sur le tabouret d'inertie est donc tel que :

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega = \text{Cste}$$



Le tabouret permet de mettre en évidence l'effet d'une déformation d'un système sur le mouvement de rotation :

- Lorsqu'on réduit le moment d'inertie, la vitesse angulaire augmente.
- Sans aucune action extérieure, la personne voit son énergie cinétique augmenter. Cette augmentation est due au travail des forces intérieures, c'est-à-dire ici le travail musculaire qu'il a fallu exercer pour bouger les bras, autrement dit pour déformer le système.