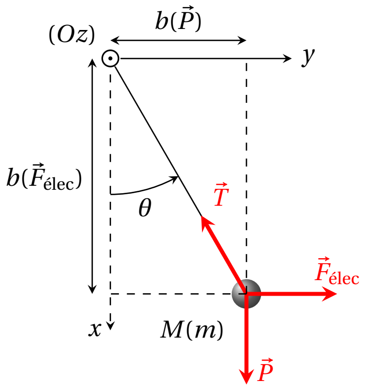
Corrigé DM19

Exercice : Pendule électrique



1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la tension du fil $\vec{T}$ et à la force électrique $\vec{F}_{\text{élec}} = q\vec{E}$. On les représente sur le graphe ci-contre.

Le bras de levier de la tension du fil est nul donc $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0}$.

Le bras de levier du poids vaut $b(\vec{P}) = \ell \sin\theta$ et avec la règle de la main droite on trouve que son moment est négatif donc $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta}$.

Pour la force électrique $b(\vec{F}_{\text{élec}}) = \ell\cos\theta$ et avec la règle de la main droite on trouve que son moment est positif donc $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{élec}}) = qE\ell\cos\theta}$.

2. On applique le théorème du moment cinétique à la masse, par rapport à l'axe orienté fixe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{T}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{élec}})$$

On a calculé les moments de force à la question précédente. On a également $\frac{\mathrm{d}L_z(M)}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\ddot{\theta}$. On conclut :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta + qE\ell\cos\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{qE}{m\ell}\cos\theta = 0}$$

Le système est en équilibre si $\theta = \theta_e = \text{Cste} \Longrightarrow \ddot{\theta} = 0$. Cette position d'équilibre est solution de :

$$\frac{g}{\ell}\sin\theta_e - \frac{qE}{m\ell}\cos\theta_e = 0 \iff \boxed{\tan\theta_e = \frac{qE}{mg}}$$

On trouve numériquement : $\boxed{\theta_e = 30{,}4^\circ}$.

3. On effectue le changement de variable $\theta = \theta_e + \varepsilon \implies \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$. L'équation vérifiée par $\varepsilon(t)$ est la suivante :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta_e + \varepsilon) - \frac{qE}{m\ell}\cos(\theta_e + \varepsilon) = 0$$

En simplifiant au premier ordre on aboutit à :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{\ell}\varepsilon\cos\theta_e + \frac{qE}{m\ell}\varepsilon\sin\theta_e + \underbrace{\frac{g}{\ell}\sin\theta_e - \frac{qE}{m\ell}\cos\theta_e}_{=0} = 0 \iff \boxed{\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{\ell}\cos\theta_e + \frac{qE}{m\ell}\sin\theta_e\right)\varepsilon = 0}$$

4. On reconnaît l'équation d'un **oscillateur harmonique** de période propre :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}\cos\theta_e + \frac{qE}{m\ell}\sin\theta_e}} = 0{,}59\,\mathrm{s}}$$