TD19 : Forces centrales - corrigé

Application 1

1. L'astéroïde est soumis uniquement à la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ exercée par la Terre. On applique le théorème du moment cinétique à l'astéroïde, par rapport à O, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

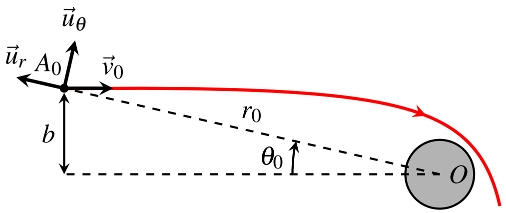
$$\frac{d\vec{L}_O(A)}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_g = r\vec{u}_r \wedge \left(-G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r\right) = \vec{0} \implies \boxed{\vec{L}_O(A) = \overrightarrow{\text{Cste}}}$$

On exprime le moment cinétique :

$$\vec{L}_O(A) = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Ce vecteur est constant donc sa projection sur $\vec{u}_z$ l'est également : $\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{Cste}}$.

On peut également écrire la constante des aires sous la forme : $C = rv_\theta = r\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta$. On poursuit le calcul en se plaçant au point A_0 (voir figure ci-contre).



$$C = r_0\vec{v}_0\cdot\vec{u}_\theta = r_0v_0\sin\theta_0 \implies \boxed{C = bv_0}$$

2. La force gravitationnelle exercée par la Terre est conservative donc l'énergie mécanique de l'astéroïde est constante. En coordonnées polaires : $E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GmM}{r}$. En utilisant la loi des aires on écrit : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{bv_0}{r^2}$. On conclut :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mb^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r} \implies \boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mb^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r}}$$

3. On calcule l'énergie mécanique au point A_0. On assimile l'énergie potentielle à sa valeur à l'infini : $E_p = 0$. Par conséquent : $\boxed{E = \frac{1}{2}mv_0^2}$. L'énergie mécanique est strictement positive donc la trajectoire est **hyperbolique** (état diffus).

4. Au périgée le rayon est **minimal** donc $\dot{r} = 0$. Le rayon r_p vérifie l'équation :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mb^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r} \iff r^2 + \frac{2GM}{v_0^2}r - b^2 = 0 \iff \boxed{r^2 + 2ar - b^2 = 0}$$

La seule solution positive est : $\boxed{r_p = -a + \sqrt{a^2+b^2}}$.

5. L'application numérique donne : $\boxed{r_p = 7{,}2\cdot 10^4\,\text{km}}$. Le rayon du périgée est supérieur au rayon terrestre donc **l'astéroïde ne percute pas la Terre**.

Application 2

1. On compare, en norme, la force gravitationnelle et la force électrostatique qui s'exercent entre le proton et l'électron :

$$\begin{cases} \|\vec{F}_g\| = G\dfrac{m_em_p}{r^2} \\ \|\vec{F}_e\| = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \implies \frac{\|\vec{F}_g\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{4\pi\varepsilon_0 Gm_em_p}{e^2} = 4{,}5\cdot 10^{-40} \lll 1$$

On peut négliger la force gravitationnelle devant la force électrostatique.

2. D'après le principe des actions réciproques (3ème loi de Newton), le proton et l'électron exercent l'un sur l'autre des forces égales en norme. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à chacune des deux particules dans le référentiel $\mathscr{R}^\star$, permet alors d'écrire :

$$m_p\|\vec{a}_p\| = m_e\|\vec{a}_e\| \iff \frac{\|\vec{a}_p\|}{\|\vec{a}_e\|} = \frac{m_e}{m_p} = 5\cdot 10^{-4} \ll 1$$

L'accélération du proton est très faible comparée à celle de l'électron donc on peut considérer que **le proton est fixe dans $\mathscr{R}^\star$**.

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron : $m_e\vec{a}_e = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\vec{u}_r$. On projette sur $\vec{u}_r$:

$$-\frac{m_ev^2}{r_0} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \iff \boxed{v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r_0}} = 2{,}2\cdot 10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

On compare cette vitesse à celle de la lumière : $\frac{v}{c} = 7\cdot 10^{-3}$. On considère généralement que l'on entre dans le domaine relativiste lorsque la vitesse dépasse 10% de c, ce qui n'est pas le cas ici. **Un modèle non relativiste est pertinent pour décrire le mouvement de l'électron à l'intérieur d'un atome d'hydrogène**.

4. L'énergie mécanique de l'électron vaut :

$$E = \frac{1}{2}m_ev^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \iff \boxed{E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}}$$

L'électron est arraché à l'attraction du proton à condition de se trouver dans un **état diffus**. Il faut pour cela que son énergie mécanique soit positive. L'énergie minimale qu'il faut fournir à l'électron pour ioniser l'atome d'hydrogène est donc égale à : $\boxed{E_{\text{ion}} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = 13{,}6\,\text{eV}}$.

5. On détermine la période de révolution de l'électron sur son orbite, puis sa fréquence :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} \implies \boxed{f = \frac{v}{2\pi r_0} = 6{,}6\cdot 10^{15}\,\text{Hz}}$$

La longueur d'onde de l'onde électromagnétique rayonnée vaut : $\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = 46\,\text{nm}}$. On se trouve dans le domaine **ultraviolet**.

TD19 : Forces centrales - corrigé

Application 3

1. On exprime l'énergie mécanique de S en fonction de r, en utilisant la loi des aires :

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r} \iff E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r}$$

Le rayon est extrémal au périgée et à l'apogée : $\dot{r} = 0$. Les rayons r_A et r_P vérifient donc :

$$E = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r} \iff \boxed{r^2 + \frac{GmM}{E}r - \frac{mC^2}{2E} = 0}$$

2. Les deux solutions de cette équation sont :

$$\boxed{r_A = -\frac{GmM}{2E} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{r_P = -\frac{GmM}{2E} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

avec $\Delta = \sqrt{\left(\frac{GmM}{E}\right)^2 + \frac{2mC^2}{E}}$ le discriminant. On note que ces rayons sont bien positifs car $E < 0$ (le mouvement est elliptique donc on se trouve dans un état lié). On conclut (voir paragraphe **2.2.2**) :

$$2a = r_A + r_P = -\frac{GmM}{E} \iff \boxed{E = -\frac{GmM}{2a}}$$

Application 4

1. On exprime la vitesse, la période et l'énergie mécanique sur l'orbite circulaire (voir application 2 pour les démonstrations) :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}} \quad ; \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}} \quad ; \quad \boxed{E_0 = -\frac{GmM}{2r_0}}$$

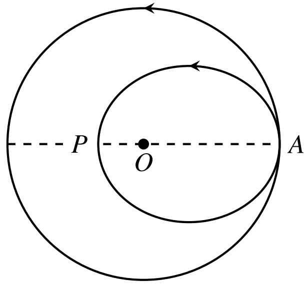
2. On détermine l'énergie mécanique sur la nouvelle trajectoire :

$$E = \frac{1}{2}m \times \frac{v_0^2}{2} - \frac{GmM}{r_0} = -\frac{3GmM}{4r_0}$$

L'énergie mécanique est strictement négative donc le satellite est dans un état lié. La trajectoire ne peut pas être circulaire puisque seule la vitesse v_0 permettait de se maintenir sur l'orbite circulaire de rayon r_0. Par conséquent **la trajectoire est nécessairement elliptique**. On exprime son demi-grand axe :

$$E = -\frac{3GmM}{4r_0} = -\frac{GmM}{2a} \iff \boxed{a = \frac{2r_0}{3}}$$

On trace l'allure des deux trajectoires sur la figure ci-contre.



3. Le changement de vitesse s'effectue au niveau de l'apogée donc $r_A = r_0$. on en déduit le rayon du périgée :

$$\boxed{r_P = 2a - r_A = \frac{r_0}{3}}$$

On utilise la loi des aires pour déterminer la vitesse au périgée (voir paragraphe **2.2.2**) :

$$C = r_A v_A = r_P v_P \iff r_0\frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{r_0}{3}v_P \iff \boxed{v_P = \frac{3v_0}{\sqrt{2}}}$$

4. On relie T à T_0 grâce à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \iff \boxed{\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}}$$

⋆ Exercice 1 : ISS

1. Sur son orbite circulaire, la vitesse de l'ISS dans le référentiel géocentrique s'obtient en appliquant le PFD (voir cours pour la démonstration) :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = 7{,}7\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}}$$

2. La période de révolution de l'ISS vaut $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$. Le nombre de révolutions de l'ISS en $T_{\mathrm{sol}} = 24\,\mathrm{h}$ vaut :

$$\boxed{N = \frac{T_{\mathrm{sol}}}{T} = 15{,}5}$$

⋆ Exercice 2 : Terre et comète de Haley

1. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \iff \boxed{a = \left(\frac{GM_sT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}000\,\mathrm{ua}}$$

La position de l'aphélie vérifie : $r_p + r_A = 2a \iff \boxed{r_A = 2a - r_p = 1{,}017\,\mathrm{ua}}$.

2. L'énergie mécanique de la Terre, dans le référentiel héliocentrique, vaut (on néglige la rotation de la Terre sur elle-même) : $E = -\frac{GM_sM_T}{2a}$. Cette énergie se conserve au cours du mouvement.

TD19 : Forces centrales - corrigé

À l'aphélie, $E = \frac{1}{2}M_T v_A^2 - \frac{GM_sM_T}{r_A} = -\frac{GM_sM_T}{2a} \iff \boxed{v_A = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} = 29{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

Au périhélie, $E = \frac{1}{2}M_T v_P^2 - \frac{GM_sM_T}{r_P} = -\frac{GM_sM_T}{2a} \iff \boxed{v_P = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2a}\right)} = 30{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

3. L'excentricité de l'ellipse vaut $\boxed{e = 0{,}017}$. Elle est proche de 0 ce qui signifie que la trajectoire de la Terre autour du soleil est $\boxed{\text{quasi-circulaire}}$.

4. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_H^2}{a_H^3} \iff \boxed{a_H = \left(\frac{T_H}{T}\right)^{\frac{2}{3}} a = 17{,}9\,\mathrm{ua}}$$

La position de l'aphélie vérifie : $r_p + r_A = 2a \iff \boxed{r_A = 2a - r_p = 35{,}3\,\mathrm{ua}}$.

À l'aphélie, $\boxed{v_A = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} = 0{,}84\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

Au périhélie, $\boxed{v_p = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a}\right)} = 54{,}4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

L'excentricité de l'ellipse vaut $\boxed{e = 0{,}97}$. Elle est inférieure et proche de 1 donc la trajectoire de la comète de Haley est une **ellipse très allongée**.

⋆ Exercice 3 : Ressort en rotation

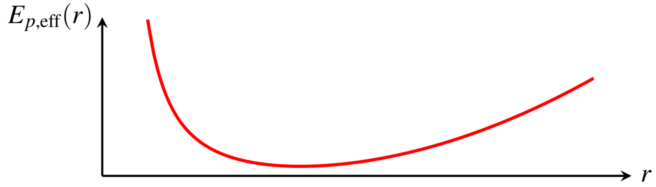
1. La force exercée par le ressort élastique est centrale (elle est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$) donc son moment par rapport à O est nul.
D'autre part, le palet est soumis à son poids et à la réaction normale du support. Ces deux forces (colinéaires à $\vec{u_z}$) sont opposées puisque le mouvement reste horizontal. Les moments de ces deux forces se compensent également ($\overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\vec{N}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{P} + \vec{N}\right) = \vec{0}$).
D'après le TMC appliqué à M, par rapport à O, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\vec{F}\right)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\vec{N}\right)}_{=\vec{0}} = \vec{0} \iff \boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}}$$

2.a) Voir cours pour la démo :

$$\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}k\left(r - \ell_0\right)^2}$$

où $C = \frac{\left\|\overrightarrow{L_O}\right\|}{m} = r^2\dot{\theta}$ est la constante des aires. On trace ci-dessous l'allure de cette fonction :



2.b) L'énergie potentielle effective a l'allure d'un **puits de potentiel infini**. Quelque soit l'énergie de la masse, celle-ci ne pourra **ni s'éloigner à l'infini, ni atteindre le centre de force**.

3. Si un mouvement circulaire est possible, il sera de rayon ℓ_1 et de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$. D'après le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre, projeté sur $\vec{u_r}$:

$$-m\ell_1\omega^2 = -k\left(\ell_1 - \ell_0\right) \iff \boxed{\ell_1\left(k - m\omega^2\right) = k\ell_0}$$

$k\ell_0$ est toujours positif, par conséquent cette relation n'est possible qu'à la condition que :

$$k - m\omega^2 > 0 \iff \boxed{\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

⋆⋆ Exercice 4 : Erreur de Satellisation

1. On applique le théorème de la puissance cinétique au satellite, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \overrightarrow{F_{\text{grav}}} \cdot \vec{v} = -\frac{GmM_T}{R^2}\vec{u_r} \cdot v\vec{u_\theta} = 0$$

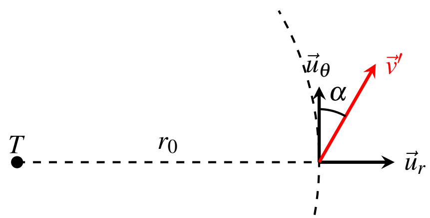
Si le mouvement est circulaire alors la force gravitationnelle ne travaille pas, donc l'énergie cinétique se conserve. Le mouvement est uniforme.

Voir cours pour le calcul de la vitesse : $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$.

2. L'énergie mécanique et la constante des aires valent alors :

$$\boxed{E = -\frac{GmM_T}{2r_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = r_0^2\dot{\theta} = r_0 v = \sqrt{GM_T r_0}}$$

3.a)



$\vec{v}$ et $\vec{v}'$ ont même norme donc l'énergie cinétique est la même dans les deux cas. L'énergie potentielle aussi puisque le satellite est lancé depuis l'orbite de rayon r_0. Par conséquent, l'énergie mécanique est inchangée. En revanche, la constante des aires est modifiée car désormais $v_\theta = \|\vec{v}'\| \cos\alpha = v\cos\alpha$.

$$\boxed{E = -\frac{GmM_T}{2r_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = r_0 v_\theta = r_0 v \cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{GM_T r_0}}$$

3.b) Le satellite est dans un état lié puisque $E < 0$, mais sa trajectoire n'est pas circulaire puisque $\vec{v}'$ n'est pas orthoradiale. La trajectoire ne peut donc qu'être **elliptique**. Le demi grand-axe de l'orbite est tel que :

$$E = -\frac{GmM_T}{2a} = -\frac{GmM_T}{2r_0} \iff \boxed{a = r_0}$$

3.c) On exprime l'énergie mécanique en un point quelconque de la trajectoire :

$$E = -\frac{GmM_T}{2r_0} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

À l'apogée et au périgée, $\dot{r} = 0$. D'autre part, $C = \cos\alpha\sqrt{GM_T r_0}$, ce qui donne :

$$-\frac{GmM_T}{2r_0} = +\frac{GmM_T r_0}{2r^2}\cos^2\alpha - \frac{GmM_T}{r}$$

En multipliant tous les termes par $\frac{2r_0}{GmM_T}r^2$, on aboutit à l'équation du second degré ci-dessous :

$$\boxed{r^2 - 2r_0 r + r_0^2\cos^2\alpha = 0}$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4r_0^2 - 4r_0^2\cos^2\alpha = 4r_0^2\left(1-\cos^2\alpha\right) = 4r_0^2\sin^2\alpha$. Les deux racines du trinôme conduisent aux expressions de r_a et r_p :

$$\boxed{r_p = r_0(1-\sin\alpha)} \quad \text{et} \quad \boxed{r_a = r_0(1+\sin\alpha)}$$

⋆⋆ Exercice 5 : Libération d'un vaisseau spatial

1. Sur son orbire circulaire initiale de rayon r_0, la vitesse du satellite vaut $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$. Après utilisation de son carburant, la vitesse du satellite vaut $v_f = 5v_0$ et son énergie mécanique :

$$\boxed{E_f = \frac{1}{2}m(5v_0)^2 - \frac{GmM}{r_0} = \frac{25}{2}mv_0^2 - mv_0^2 = \frac{23}{2}mv_0^2}$$

L'énergie mécanique est **strictement positive** donc le satellite se trouve dans un **état diffus**. Il quitte le champ d'attraction gravitationnel de la planète.

2. Au moment du ralentissement, l'énergie mécanique du satellite vaut :

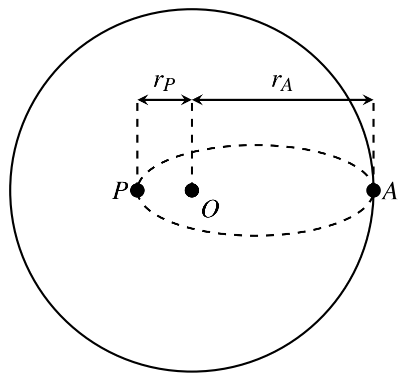
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{GmM}{r_0} = \frac{1}{8}\frac{GmM}{r_0} - \frac{GmM}{r_0} = -\frac{7}{8}\frac{GmM}{r_0}$$

L'énergie mécanique est **strictement négative** donc le satellite se trouve dans un **état lié**. Sa trajectoire ne peut plus être circulaire car la vitesse $\frac{v_0}{2}$ ne lui permet pas de se maintenir sur une orbite circulaire de rayon r_0. Par conséquent, la trajectoire est nécessairement **elliptique**. On va montrer que le point de départ de cette orbite est l'apogée.

Sur sa nouvelle trajectoire elliptique, le demi grand-axe est tel que :

$$E = -\frac{GmM}{2a} = -\frac{7}{8}\frac{GmM}{r_0} \iff \boxed{a = \frac{4r_0}{7} < r_0}$$

Le grand-axe $2a$ de l'ellipse est inférieure au diamètre $2r_0$ de l'orbite intiale. Le schéma ci-dessous illustre la situation et justifie que le point de départ est bien l'apogée de la nouvelle trajectoire.



3. La constante de aires vaut $C = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$. Au périgée et à l'apogée, la vitesse est orthoradiale, donc :

$$\boxed{C = r_A v_A = r_P v_P}$$

4. D'après l'énoncé, $v_A = \frac{v_0}{2}$. D'après la figure ci-dessus, on reconnait que $r_A = r_0$. On a montré à la question 2 que $a = \frac{4r_0}{7}$. La position du périgée est donnée par :

$$r_P + r_A = 2a \iff \boxed{r_P = \frac{8r_0}{7} - r_0 = \frac{r_0}{7}}$$

On détermine enfin v_P en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\boxed{v_P = \frac{r_A}{r_P}v_A = \frac{7}{2}v_0}$$

5. Une fois son carburant épuisé, la vitesse du satellite vaut $\frac{7}{2}v_0 + 4v_0 = \frac{15}{2}v_0$. Son énergie mécanique vaut :

$$E_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{15}{2}v_0\right)^2 - \frac{GmM}{\frac{r_0}{7}} = \frac{225}{8}mv_0^2 - 7mv_0^2 \iff \boxed{E_f = \frac{169}{8}mv_0^2}$$

Comparons l'énergie mécanique finale dans les cas a) et b) :

$$\frac{E_f^b}{E_f^a} = \frac{\frac{169}{8}}{\frac{23}{2}} = \frac{169}{92} \simeq 1,8$$

La situation b) est favorable en termes énergétiques puisque l'énergie mécanique finale est supérieure. On rappelle qu'une fois à grande distance de la planète, l'énergie cinétique du satellite est égale à E_f puisque $E_p = 0$ à l'infini. En utilisant astucieusement l'attraction gravitationnelle de la planète, on peut libérer le satellite de l'attraction de cette dernière et l'éjecter avec une énergie plus importante.

⋆⋆ Exercice 6 : Le petit prince

La vitesse de libération d'un corps lancé depuis la surface d'un astre de masse M et de rayon R vaut $v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (voir cours sur la 2° vitesse cosmique pour la démo). Cela correspond à une énergie cinétique $E_{c,\text{lib}} = \frac{GmM}{R}$.

On estime l'énergie cinétique mise en jeu dans un saut à pieds joints. Un tel saut permet en général d'élever son centre de gravité d'environ 50 cm (plus d'un mètre pour le record du monde de saut en hauteur). Cela correspond à une énergie cinétique $E_c = mgh$ où $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ est le champ gravitationnel à la surface de la Terre et $h = 0,5\,\text{m}$.

Appliqué au cas du petit prince, un tel saut permet de quitter le champ d'attraction gravitationnel de la planète à condition que :

$$mgh = \frac{GmM_T}{R_T^2}h > \frac{GmM}{R} \iff \frac{M_T h}{R_T^2} > \frac{M}{R}$$

Comme la planète a une densité identique à celle de la Terre :

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \iff M = M_T\left(\frac{R}{R_T}\right)^3$$

On en déduit que la condition sur le rayon de la planète s'écrit :

$$\frac{M_T h}{R_T^2} > \frac{M_T}{R_T^3}R^2 \iff \boxed{R < \sqrt{R_T h} \simeq 2\,\text{km}}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Trajectoire dans un champ gravitationnel

1. Voir cours.

2. Voir cours. $\boxed{C = \frac{L}{m}}$.

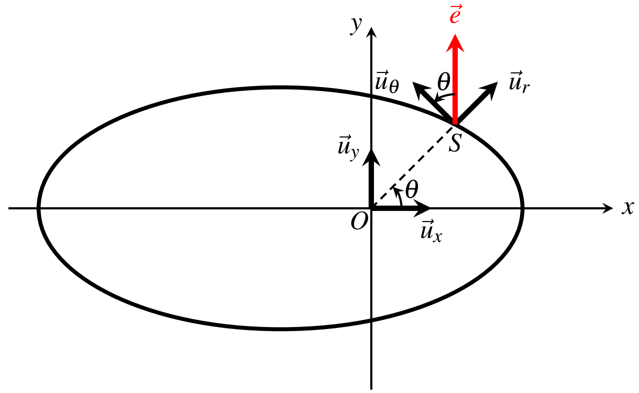
3. On dérive ce vecteur par rapport au temps : $\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{L}{GmM}\frac{d\vec{V}}{dt} + \dot{\theta}\vec{u}_r$.

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen : $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$. Par ailleurs, $L = mr^2\dot{\theta}$. Par conséquent :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{GmM}\left(-\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r\right) + \dot{\theta}\vec{u}_r = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\theta}\vec{u}_r = \vec{0}$$

$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{e} \text{ est une constante du mouvement}}$.

4. On représente graphiquement la situation :



Dans un premier temps, notons que $\vec{e}\cdot\vec{u}_\theta = e\cos\theta$. Ensuite, on peut exprimer ce même produit scalaire en remplaçant $\vec{e}$ par son expression :

$$\vec{e}\cdot\vec{u}_\theta = \left(\frac{L}{GmM}\vec{V} - \vec{u}_\theta\right)\cdot\vec{u}_\theta = \frac{L}{GmM}\cdot r\dot{\theta} - 1$$

En utilisant $L = mC$, $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et $\vec{e}\cdot\vec{u}_\theta = e\cos\theta$, on aboutit à la relation :

$$e\cos\theta = \frac{C^2}{GMr} - 1 \iff \boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad \text{avec } p = \frac{C^2}{GM}}$$

La trajectoire est circulaire si r est indépendant de θ, c'est-à-dire si $\boxed{e = 0}$. Dans ce cas :

$$R = p = \frac{C^2}{GM} = \frac{R^2V^2}{GM} \iff \boxed{V = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

On retrouve le résultat démontré en cours.