Correction du DNS 21

EXERCICE 1

1) La fonction sinus est bornée et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = 0.$$

2) Le numérateur est équivalent à $-x^2$ au voisinage de $+\infty$ car x^4e^{-x} tend vers 0 et $x\ln(1+x) \overset{+\infty}{\sim} x\ln x$, et le dénominateur est équivalent à x^2 donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4e^{-x} + x\ln(1+x) - x^2}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = -1.$$

3) On pose $h = x - 1/2$ (soit $x = 1/2 + h$) pour se ramener en 0 :

$$\lim_{x\to1/2} \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} = \lim_{h\to0} \frac{\cos(\pi/2+\pi h)}{2h} = \lim_{h\to0} \frac{-\sin \pi h}{2h} = \lim_{h\to0} \frac{-\pi h}{2h} = -\frac{\pi}{2}.$$

4) On peut factoriser le numérateur et le dénominateur par $x-2$:

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

5) On a

$$\lim_{x\to0} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to0} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to0} e^{x\ln\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to0} e^{x\ln(x+1)-x\ln x} = 1$$

car $x\ln(x+1)$ et $x\ln x$ tendent vers 0 en 0.

6) Au voisinage de 0 on a

$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et

$$\sqrt[3]{1+3x} = (1+3x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}(3x) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{(3x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 + x - x^2 + o(x^2)$$

donc $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et donc

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

7) Au voisinage de 0 on a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}} = e^{1-x/2+o(x)} = e.e^{-x/2+o(x)} = e(1-x/2+o(x)) = e - ex/2 + o(x)$$

donc

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e - ex/2 + o(x) - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

8) On pose $h = x-1$ (donc $x = 1+h$). Alors

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{h\to0} \left(\frac{1+h}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to0} \frac{h+h^2-\ln(1+h)}{h\ln(1+h)}.$$

Or au voisinage de 0 on a $h\ln(1+h) \sim h^2$ et

$$h + h^2 - \ln(1+h) = h + h^2 - h + h^2/2 + o(h^2) = 3h^2/2 + o(h^2) \sim 3h^2/2$$

donc

$$\lim_{h\to0} \frac{h+h^2-\ln(1+h)}{h\ln(1+h)} = \lim_{h\to0} \frac{3h^2/2}{h^2} = \frac{3}{2}.$$

9) Considérons les suites de termes généraux $u_n = n$ et $v_n = n + 1/2$. Elles tendent toutes deux vers $+\infty$ mais $u_n - \lfloor u_n \rfloor = 0$ tend vers 0 alors que $v_n - \lfloor v_n \rfloor = 1/2$ tend vers $1/2$. Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \lfloor x \rfloor) \text{ n'existe pas.}$$

EXERCICE 2

1) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} = 0$$

donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. De même

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{\ln(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h/2+o(h)-1}{h+o(h)} = \frac{1}{2}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$.

2) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{x\ln x} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

3) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in]0,1[$ on a

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}+2}{2x\ln^2 x}.$$

Déterminons la limite de f' en 1. En posant $h = x-1$ on a

$$\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}+2 = \sqrt{1+h}\ln(1+h) - 2\sqrt{1+h}+2 \overset{0}{=} (1+h/2+o(h))(h-h^2/2+o(h^2)) - 2(1+h/2-h^2/8+o(h^2)+2 \overset{0}{=} h^2/4+o(h^2)$$

et

$$2x\ln^2 x = 2(1+h)\ln^2(1+h) \overset{0}{\sim} 2h^2$$

donc

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2/4}{2h^2} = \frac{1}{8}.$$

D'après le théorème de limite de la dérivée on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et que $f'(1) = \frac{1}{8}$.

EXERCICE 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{-2n^3 - 8n^2 - 12n - 4}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} < 0$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

Enfin, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) La décomposition est de la forme

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k+1} + \frac{d}{(k+1)^2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

En multipliant par k^2 et en prenant $k = 0$ on obtient $b = 1$. En multipliant par $(k+1)^2$ et en prenant $k = -1$ on obtient $d = 1$. En mettant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs, ou en donnant d'autres valeurs à k, on obtient $a = -2$ et $c = 2$. Ainsi

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = -\frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc

$$u_n = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

On regroupe la première et la troisième somme pour faire apparaître une somme télescopique, et on fait un changement d'indice dans la dernière somme :

$$\begin{aligned} u_n &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{2}{n+1} - 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - 1. \end{aligned}$$

Les deux sommes tendent vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, donc finalement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$