Devoir n°22 (non surveillé)

EXERCICE 1

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$.

EXERCICE 2 - Somme harmonique et constante d'Euler

On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1) Étudier la monotonie de (H_n).

2) a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{k+1}\leqslant \ln(k+1)-\ln k\leqslant \dfrac{1}{k}$:

(i) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

(ii) En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$.

b) En déduire que $\ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant \ln n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c) En déduire la limite et un équivalent simple de H_n au voisinage de $+\infty$.

3) On considère la suite de terme général $u_n=H_n-\ln n$.

a) Étudier la monotonie de (u_n).

b) En déduire que (u_n) est convergente et que sa limite est comprise entre 0 et 1.

La limite de (u_n) est appelée **constante d'Euler** et notée γ : on a donc $H_n=\ln n+\gamma+o(1)$. Une valeur approchée de γ est 0,577. On ne sait pas si γ est un nombre rationnel ou pas.

EXERCICE 3

1) Montrer que la fonction $\varphi : t\mapsto \dfrac{1-t^3}{t}$ définit une bijection de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$.

Dans la suite, on note u la fonction réciproque de cette bijection.

2) Dresser sans calculs le tableau de variation de u avec ses limites en 0 et en $+\infty$.

3) Montrer que $u(1)>\dfrac{1}{2}$.

4) Montrer que $u(x)^3+xu(x)-1=0$ pour tout $x\geqslant 0$.

5) a) Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $u'(x)=-\dfrac{u(x)}{3u(x)^2+x}$ pour tout $x\geqslant 0$.

b) Montrer que $|u'(x)|\leqslant\dfrac{1}{3u(x)}$ pour tout $x\geqslant 0$.

6) Déterminer le développement limité de u à l'ordre 1 en 0.

7) a) Montrer que $u(x)\sim\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Déterminer un équivalent de $u(x)-\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.