Corrigé DS6

Exercice 1 : Son produit par une guitare

1. La note Mi^3 est située exactement deux octaves au-dessus du Mi^1. Sa fréquence est donc **quatre fois plus élevée** : $\boxed{f(\text{Mi}^3) = 329,6\,\text{Hz}}$.

2. Notons f la fréquence associée au La^1. Les fréquences correspondant aux notes suivantes, en montant dans la gamme par demi-tons successifs, sont εf, $\varepsilon^2 f$, $\varepsilon^3 f$ et ainsi de suite. Après le douzième demi-ton on trouve la fréquence $\varepsilon^{12} f$ pour la note La^2. Or, La^2 est située une octave au-dessus de La^1 donc sa fréquence est double. On peut donc écrire : $\varepsilon^{12} f = 2f \iff \boxed{\varepsilon = 2^{1/12}}$.

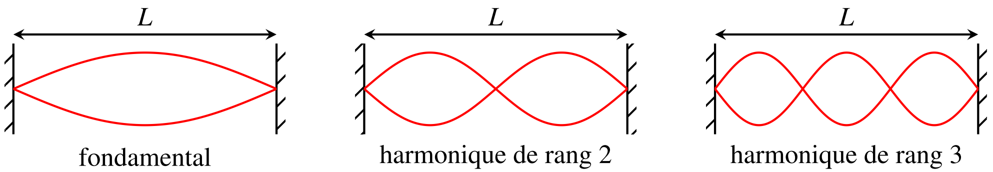
Soit p le nombre de demi-tons qui séparent les notes La^1 et Re^2. D'après le calcul précédent on peut écrire :

$$f(\text{Re}^2) = \varepsilon^p f(\text{La}^1) \iff \frac{f(\text{Re}^2)}{f(\text{La}^1)} = 2^{p/12} \iff \boxed{p = 12\frac{\ln\left(\frac{f(\text{Re}^2)}{f(\text{La}^1)}\right)}{\ln 2} = 5}$$

Les notes La^1 et Re^2 sont séparées par **cinq demi-tons**.

3. Les conditions limites (extrémités de la corde fixées) imposent l'apparition d'une **onde stationnaire**.

4. Les conditions limites imposent **un nombre entier de fuseaux** entre les deux sillets. Les trois modes propres de fréquences les plus basses correspondent respectivement à $n = 1, 2$ et 3 fuseaux.



5. La longueur de corde L correspond à un nombre entier de fuseaux, or chaque fuseau a une longueur $\lambda/2$, donc les longueurs d'ondes vérifient :

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}^\star \iff \boxed{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}}$$

6. Les fréquences contenues dans ce spectre sont des multiples entiers de 250 Hz (environ). C'est cohérent avec le résultat de la question 3 et une fréquence fondamentale de l'ordre de 250 Hz. La fréquence associée à une note correspond à la fréquence fondamentale du son émis. Or la valeur observée correspond à la note Si^2 ; ce son a été produit par la **corde 5**.

7. La tension T, qui est une force, a pour dimension : $[T] = \text{MLT}^{-2}$. La masse linéique est, comme son nom l'indique, homogène à une masse divisée par une longueur : $[\mu] = \text{ML}^{-1}$. On vérifie que c a la dimension d'une vitesse (LT^{-1}) :

$$\left[\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right] = \left(\frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{ML}^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\text{L}^2\text{T}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{LT}^{-1}$$

Cette relation est homogène.

8. La corde 3 à vide joue la note Re^2 de fréquence $f = 146,8\,\text{Hz}$ quand elle est accordée. Il s'agit de la fréquence fondamentale pour cette corde ($n = 1$) et la célérité correspondante est telle que : $f = \frac{c}{2L} \iff c = 2Lf$. On en déduit la masse linéique de la corde : $c = \sqrt{T/\mu} \iff \mu = \frac{T}{c^2} = \frac{T}{4L^2f^2}$. Enfin, on détermine la masse m de la corde 3 :

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{T}{4L^2f^2} \iff \boxed{m = \frac{T}{4Lf^2} = 0,21\,\text{g}}$$

Les cordes sont des cylindres de hauteur L et diamètre d, leur volume vaut : $V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L$. Par définition de la masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi L d^2} \iff \boxed{d = \sqrt{\frac{4m}{\pi L \rho}} = 0,61\,\text{mm}}$$

9. Les battements apparaissent car on superpose deux sons de fréquences différentes mais proches. On note f' la fréquence du son produit par la corde de tension T', tandis que le diapason produit un son de fréquence $f = 146,8\,\text{Hz}$, qui est également la fréquence obtenue avec la corde de tension T (voir question précédente). On compare ces deux fréquences :

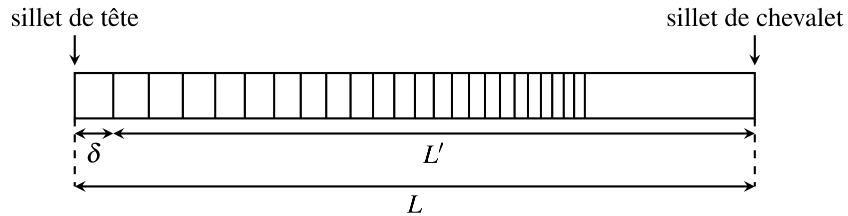
$$\frac{f'}{f} = \frac{c'}{2L} \times \frac{2L}{c} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \implies f' = \sqrt{\frac{T'}{T}}f$$

La fréquence des battements est égale à l'écart entre les fréquences f' et f :

$$\boxed{f_{\text{batt}} = f - f' = f\left(1 - \sqrt{\frac{T'}{T}}\right) = 1,3\,\text{Hz}}$$

10. Les cordes 5 et 6 ont le même diamètre donc elles ont la même masse linéique. Or, le son joué a pour fréquence fondamentale : $f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. À longueur L et masse linéique μ égales, la corde qui joue la note la plus haute est celle pour laquelle la tension T est la plus forte. **La corde 6 est plus tendue que la corde 5**.

11. On note L' la longueur vibrante quand on appuie sur la première frette. La distance entre le sillet de tête et la première frette vaut $\delta = L - L'$ (voir figure ci-dessous).



On note f la fréquence fondamentale pour la corde à vide (longueur L) et f' celle obtenue en appuyant sur la première frette (longueur L'). Puisque l'on monte d'un demi-ton en appuyant sur la première frette on peut écrire :

$$f' = 2^{1/12} f \iff \frac{c}{2L'} = 2^{1/12}\frac{c}{2L} \iff L' = \frac{L}{2^{1/12}}$$

La distance entre le sillet de tête et la première frette vaut : $\boxed{\delta = L\left(1 - 2^{-1/12}\right) = 3,5\,\text{cm}}$.

Exercice 2 : Mesure du rayon de l'étoile Proxima Centauri

1. à **5.** Voir cours.

6. La différence de marche pour la source S' vaut :

$$\begin{aligned}\delta_{S'}(M) &= (S'T_2M) - (S'T_1M) \\ &= (S'T_2) + (T_2M) - (S'T_1) - (T_1M) \\ &= (S'T_2) - (S'T_1) + \delta_S(M)\end{aligned}$$

On suppose que les indices des milieux traversés (vide, air) sont égaux à 1, donc les chemins optiques s'identifient aux distances parcourues. Le calcul de $S'T_2 - S'T_1$ est semblable à celui de $T_2M - T_1M$, avec r qui est l'analogue de x et D_E l'analogue de D. On trouve après calculs $S'T_2 - S'T_1 = \frac{ar}{D_E}$ d'où : $\boxed{\delta_{S'}(M) = \delta_S(M) + \frac{ar}{D_E}}$.

7. Les franges claires correspondent à des interférences constructives :

$$\delta_{S'}(M) = 0\ [\lambda] \iff \frac{ax}{D} + \frac{ar}{D_E} = 0\ [\lambda]$$

$$\iff x = -\frac{Dr}{D_E}\ \left[\frac{\lambda D}{a}\right]$$

Pour la source S les positions des franges brillantes sont $x = 0\ \left[\frac{\lambda D}{a}\right]$. Les deux figures d'interférences sont similaires : franges rectilignes parallèles à (Oy), avec le même interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$. Il y a néanmoins une différences entre des deux figures : **elles sont décalées l'une par rapport à l'autre de** $\Delta x = \frac{Dr}{D_E}$.

8. Si les interférences sont constructives pour l'une des sources (p est entier) et destructives pour l'autre (p est demi-entier), alors **l'écart** $p_{S'}(M) - p_S(M)$ **est nécessairement un demi-entier**. Par conséquent la plus petite valeur qui remplit cette condition est $\boxed{p_{S'}(M) - p_S(M) = \frac{1}{2}}$.

9. La condition précédente revient à choisir a telle que :

$$p_{S'}(M) - p_S(M) = \frac{\delta_{S'}(M) - \delta_S(M)}{\lambda} = \frac{ar}{\lambda D_E} = \frac{1}{2} \iff \boxed{a = \frac{\lambda D_E}{2r}}$$

10. On calcule le rayon de *Proxima Centauri* :

$$\tan\frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{D_E} \iff \boxed{r = \frac{\alpha D_E}{2} = 9{,}87\cdot 10^4\,\mathrm{km}}$$

<u>Remarque</u> : il faut veiller à convertir α en radians : $\alpha = 1{,}02\cdot 10^{-3\,\prime\prime} = 4{,}95\cdot 10^{-9}\,\mathrm{rad}$. On en déduit la valeur de a :

$$\boxed{a = 243\,\mathrm{m}}$$

Cette distance est élevée mais pas aberrante. Elle peut être obtenue à l'aide de deux grands télescopes placés à proximité l'un de l'autre (le VLT est un ensemble de quatre télescopes principaux et quatre auxiliaires).

Exercice 3 : Des pendules

1. et **2.** Voir cours.

3. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la tension du fil $\vec{T}$ et à la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. On applique le théorème du moment cinétique par rapport au point O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$$

avec $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$, $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta\vec{u}_z$ et $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$. On calcule le moment de la force de frottement :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f} = \ell\vec{u}_r\wedge(-\alpha\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = -\alpha\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On projette le TMC sur $\vec{u}_z$:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - \alpha\ell^2\dot{\theta} \iff \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \overset{\text{petits angles}}{\Longrightarrow} \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

4. On identifie la pulsation propre et le facteur de qualité : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. On se trouve en régime pseudo-périodique à condition que :

$$Q > \frac{1}{2} \iff \boxed{\frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{\ell}} > \frac{1}{2}}$$

5. Le poids s'écrit : $\boxed{\vec{P} = mg(\sin\alpha\vec{u}_x - \cos\alpha\vec{u}_z)}$. On projette ensuite le vecteur $\vec{u}_x$ dans la base polaire : $\vec{u}_x = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta$. On conclut que : $\boxed{\vec{P} = mg(\cos\theta\sin\alpha\vec{u}_r - \sin\theta\sin\alpha\vec{u}_\theta - \cos\alpha\vec{u}_z)}$.

6. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale du plan $\vec{N} = \|\vec{N}\|\vec{u}_z$ et à la tension du fil $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_r$. On applique le théorème du moment cinétique par rapport à O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

Le moment cinétique vaut $\vec{L}_O(M) = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z$. Le moment de la tension est encore nul ($\vec{T}$ colinéaire à $\overrightarrow{OM}$). On calcule le moment du poids :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \ell\vec{u}_r\wedge mg(\cos\theta\sin\alpha\vec{u}_r - \sin\theta\sin\alpha\vec{u}_\theta - \cos\alpha\vec{u}_z) = mg\ell(-\sin\theta\sin\alpha\vec{u}_z + \cos\alpha\vec{u}_\theta)$$

puis celui de la réaction normale : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N}) = \ell\vec{u}_r\wedge\|\vec{N}\|\vec{u}_z = \ell\|\vec{N}\|\vec{u}_\theta$. On projette le TMC sur $\vec{u}_z$:

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\alpha\sin\theta \iff \ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{\ell}\sin\theta = 0 \overset{\text{petits angles}}{\Longrightarrow} \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{\ell}\theta = 0}$$

La période des petites oscillations vaut : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\sin\alpha}}}$.