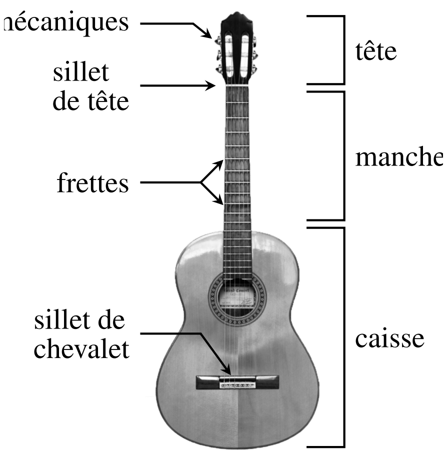
DS de physique n°6

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte trois exercices indépendants.*

Exercice 1 : Son produit par une guitare



Les six cordes d'une guitare sont fabriquées en nylon de masse volumique $\rho = 1\,140\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Elles sont plaquées contre le sillet de chevalet et le sillet de tête, et vibrent entre ces deux points. Elles ont toutes la même longueur vibrante : $L = 63\,\mathrm{cm}$. Le son est produit par pincement ou frottement des cordes, et amplifié par la caisse.

Les mécaniques sont des clés utilisées pour accorder la guitare. On les tourne pour modifier la tension des cordes. Les frettes sont des segments métalliques situés sur le manche contre lesquels on appuie la corde (avec son doigt ou un capodastre) pour réduire sa longueur vibrante.

Les cordes sont généralement accordées (du grave à l'aigu) avec les notes suivantes (cordes jouées à vide) :

Corde	1	2	3	4	5	6
Note	Mi^1	La^1	Re^2	Sol^2	Si^2	Mi^3
Fréquence (Hz)	$82,40$	$110,0$	$146,8$	$196,0$	$246,9$	

Cette combinaison de notes est appelée *accordage standard*. Les notes sont réparties sur une *gamme*, elle-même séparée en intervalles appelés *octaves*, sur lesquels la fréquence varie du simple au double (par exemple la note Mi^1 correspond au Mi de la première octave). Chaque octave est décomposée en douze *demi-tons*, pour lesquels la fréquence progresse de façon géométrique, ce qui signifie que l'on passe d'un demi-ton au suivant en multipliant la fréquence par le même facteur ε.

1. Calculer la fréquence associée à la note Mi^3.

2. Quelle est la valeur de ε ? Déterminer le nombre de demi-tons qui séparent les notes La^1 et Re^2 .

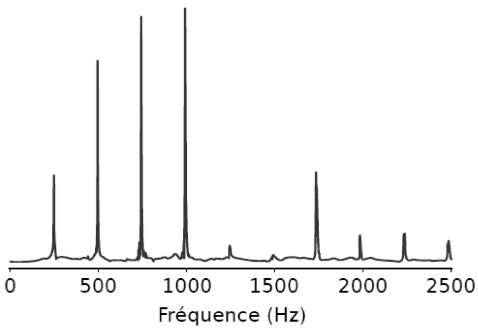
On fait vibrer l'une des cordes, à vide. Celle-ci est fixée au niveau du sillet de chevalet et du sillet de tête, distants l'un de l'autre de L.

3. Quel type d'onde observe-t-on sur la corde ?

4. Tracer l'aspect de la corde dans les trois modes propres de fréquences les plus basses.

5. Établir l'expression des fréquences propres de vibration d'une corde de guitare jouée à vide en fonction de L, de la célérité c et d'un entier naturel non nul n.

Le son produit par une seule corde de guitare a été enregistré. On donne sur la figure ci-contre son spectre en amplitude obtenu par transformée de Fourier.



6. Ce spectre est-il cohérent avec le résultat de la question 5 ? Justifier. Déterminer quelle corde a été excitée.

La célérité des ondes mécaniques transverses sur une corde de masse linéique μ, tendue avec une force de tension T, est donnée par la relation : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

7. Vérifier l'homogénéité de cette relation.

8. La note jouée par la corde 3 à vide est juste lorsque $T = 11,4\,\mathrm{N}$. Calculer la masse puis le diamètre de la corde 3.

9. On suppose que la corde 3 est légèrement détendue : $T' = 11,2\,\mathrm{N}$. Calculer la fréquence des battements que l'on entend si l'on superpose le son produit par cette corde à vide avec le son d'un diapason réglé sur la note Re^2.

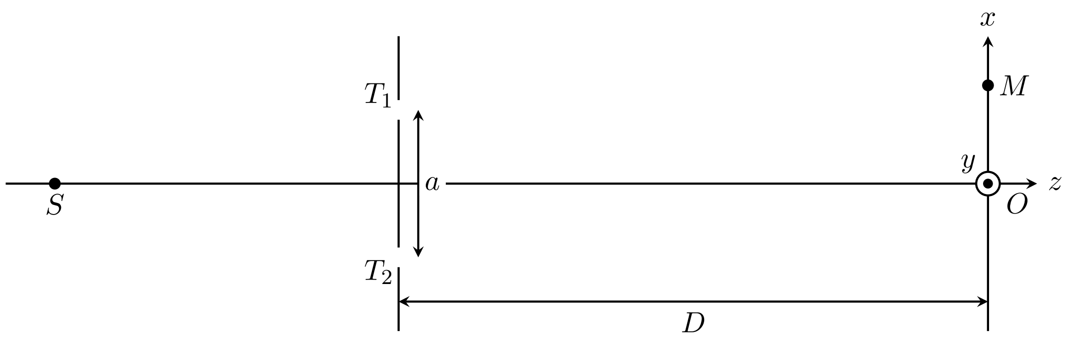
10. Les cordes 5 et 6 ont à peu près le même diamètre. Laquelle est la plus tendue ? Justifier.

11. On pose le doigt sur la première frette du manche pour passer de la note jouée par une corde à vide à celle correspondant au demi-ton supérieur. Calculer la distance entre le sillet de tête et la première frette.

Exercice 2 : Mesure du rayon de l'étoile Proxima Centauri

L'étoile *Proxima Centauri* est la plus proche de la Terre après le Soleil. Elle a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* : $\alpha \simeq 1,02 \pm 0,08$ milliseconde d'arc. Connaissant sa distance D_E, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointé sur elle. L'étoile se situe sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre S. Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'Young de taille identique, respectivement en T_1 et T_2, séparés d'une distance a réglable. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte des lentilles de l'instrument et on considérera que la lumière produite par l'étoile est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$. Les observations sont effectuées dans un plan éloigné. Un point M dans ce plan est repéré par ses coordonnées (x, y). La distance D entre le plan des trous et le plan d'observation est telle que $D \gg a, |x|, |y|$.



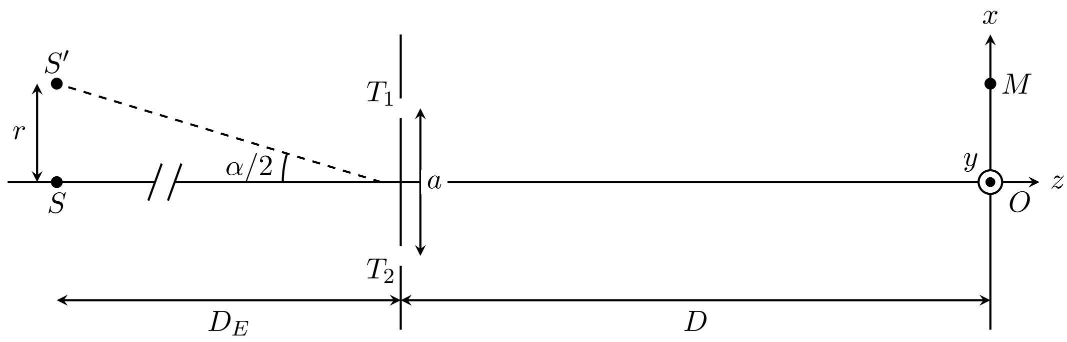
1. Tracer la marche des rayons issus de S et interférant au point M.

2. Établir l'expression de la différence de marche $\delta_S(M)$ entre ces deux rayons.

3. Expliquer, en le justifiant, quelle est la forme des franges et comment elles sont orientées dans le plan d'observation.

4. En notant I_0 l'intensité lumineuse moyenne, exprimer l'intensité $I(M)$ en un point quelconque du plan d'observation.

5. Établir l'expression de l'interfrange i.



L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire α. On considère un autre point source S' à la périphérie de l'étoile. On admet que les rayons issus de S' n'interfèrent pas avec ceux issus de S. On s'intéresse dès lors à la figure d'interférences produite par la source S' seule. On note r le rayon de l'étoile.

6. En utilisant un calcul similaire à celui de la question 2, montrer que la différence de marche entre les deux rayons issus de S' et interférant en M vaut :

$$\delta_{S'}(M) = \delta_S(M) + \frac{ar}{D_E}$$

7. Déterminer les positions des franges claires pour la source S'. Quelle différence y a-t-il entre la figure d'interférences produite par S et celle produite par S'?

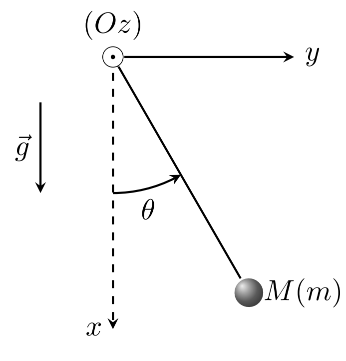
En modifiant la valeur de a on peut faire apparaître un brouillage des franges, qui se produit lorsque les interférences sont constructives pour l'une des sources et destructives pour l'autre. On note respectivement $p_S(M)$ et $p_{S'}(M)$ les ordres d'interférences en M pour la source S et la source S'.

8. Quelle est la plus petite valeur possible pour $p_{S'}(M) - p_S(M)$ telle que les interférences sont constructives pour l'une des sources et destructives pour l'autre ?

9. On suppose que la distance a est choisie de sorte que la condition précédente soit vérifiée. Exprimer a en fonction de λ, D_E et r.

10. Application numérique : *Proxima Centauri* est située à la distance $D_E = 3,99 \cdot 10^{13}\,\text{km}$. Calculer r puis a. Commenter.

Exercice 3 : Des pendules



Un pendule est constitué d'une masse ponctuelle m suspendue à une potence par un fil de masse négligeable et de longueur ℓ. La masse oscille dans un plan vertical. La direction du fil est mesurée par l'angle θ, définie à partir de la verticale. Dans un premier temps on néglige tout frottement.

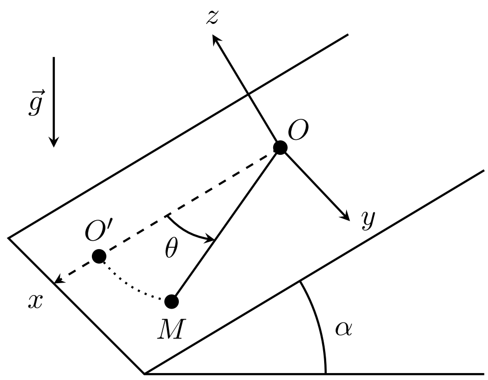
1. Établir l'équation du mouvement de ce pendule à l'aide du théorème du moment cinétique.

2. Simplifier cette équation dans l'approximation d'un mouvement de faible amplitude. En déduire l'expression de la période T_0 des petites oscillations.

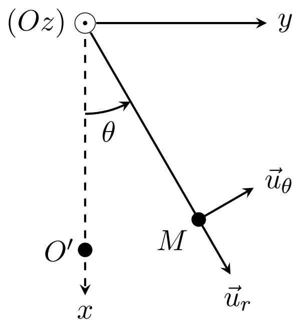
Désormais on tient compte des frottements, que l'on modélise par une force proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Les oscillations sont toujours de faible amplitude.

3. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

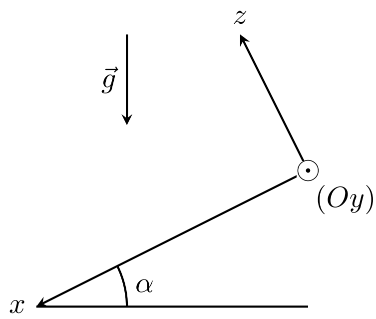
4. Déterminer une inégalité vérifiée par α, m, g et ℓ pour que la masse effectue un mouvement d'oscillations amorties (régime pseudo-périodique).



Vue en perspective



Vue dans le plan (Oxy)



Vue dans le plan (Oxz)

Le pendule est maintenant posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La masse oscille en glissant sur le plan. À nouveau on néglige tout frottement.

5. Projeter le poids $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$, puis dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

6. En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport au point O, déterminer l'équation du mouvement puis la période des petites oscillations.