Devoir n°23 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit a un réel. Soit la famille de polynômes $\mathcal{F} = (P, Q, R)$ où $P = X^2 + 2X + a$, $Q = 1 - X^2$ et $R = 2X^2 + 6X + 4$.

1) Pour quelles valeurs de a la famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

2) En déduire, sans faire de nouveaux calculs, les valeurs de a pour lesquelles la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ et celles pour lesquelles la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) On suppose que $a = 0$. Déterminer les coordonnées de X^2 dans $\mathcal{F}$.

EXERCICE 2 - Polynômes de Lagrange

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts.

1) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé. On veut construire un polynôme L_i de degré $n - 1$ tel que :

$$(*) \qquad \forall\, j \in \{1, \dots, n\},\ L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Expliquer pourquoi si L_i vérifie $(*)$, alors il est nécessairement de la forme :

$$L_i = \lambda(X - x_1) \dots (X - x_{i-1})(X - x_{i+1}) \dots (X - x_n)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer λ pour que L_i vérifie $(*)$.

Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés **polynômes de Lagrange** associés à la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

c) On suppose (dans cette question uniquement) que $n = 3$ et que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$. Calculer L_1, L_2 et L_3.

2) a) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels, et soit $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$. Calculer $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$.

b) Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3) Soient $y_1, \dots, y_n$ des réels.

a) Montrer qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que :

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ P(x_i) = y_i.$$

b) Montrer qu'un tel polynôme est unique.

c) En utilisant la question 1)c), déterminer l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 5$ et $P(3) = -1$.