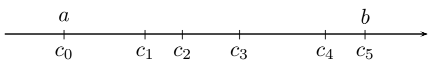
Chapitre 15

INTÉGRATION

I Fonctions en escalier

1 Subdivisions d'un segment

Définition 1 *Une* **subdivision** *d'un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *($a<b$) est une famille finie* $\sigma=(c_0,c_1,\ldots,c_n)$ *d'éléments de* $[a,b]$ *telle que* $a=c_0<c_1<\ldots<c_n=b$.



On appelle alors **pas** de σ le réel $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}|c_{k+1}-c_k|$, c'est-à-dire l'écart maximal entre deux éléments successifs de la subdivision.

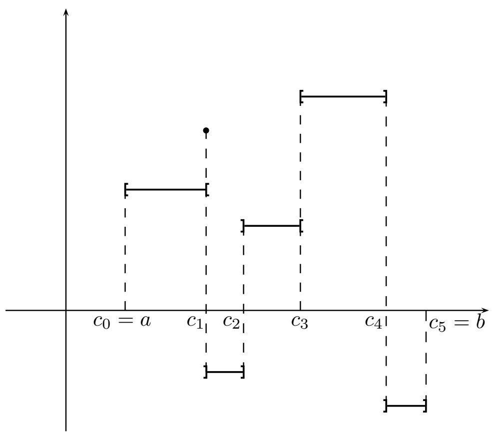
Par exemple, en posant $c_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0\leqslant k\leqslant n$, on définit une subdivision (dite régulière) de $[a,b]$ dont le pas est $\dfrac{b-a}{n}$.

2 Fonctions en escalier sur un segment

Définition 2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est une* **fonction en escalier sur** $[a,b]$ *s'il existe une subdivision* $\sigma=(c_0,\ldots,c_n)$ *de* $[a,b]$ *telle que* f *soit constante sur chaque intervalle* $]c_k,c_{k+1}[$.

On dit alors que la subdivision σ est **subordonnée à** f.

On notera $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$.



Proposition 1 *Si* f *et* g *sont deux fonctions en escalier sur* $[a,b]$*, alors* $f+g$*,* αf *(où* $\alpha\in\mathbb{R}$*) et* $f\times g$ *aussi.*

En particulier, $\mathcal{E}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}([a,b]),+,.)$.

Démonstration :

Pour αf, c'est immédiat. Pour $f+g$ et $f\times g$, il suffit de considérer une subdivision subordonnée à la fois à f et à g (obtenue par exemple en réunissant les points d'une subdivision subordonnée à f et d'une subdivision subordonnée à g). □

Proposition 2 *Une fonction en escalier sur un segment est bornée sur ce segment.*

Démonstration : Elle prend un nombre fini de valeurs. □

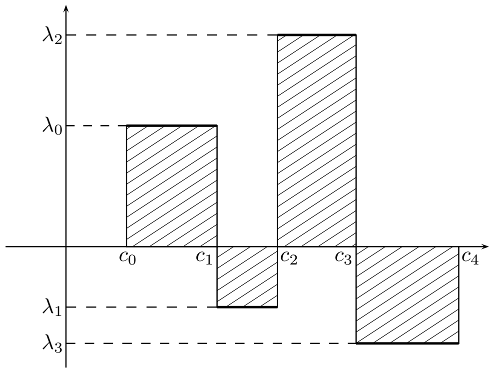
3 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition 3 *Soit f une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$. Soit $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à f.* **L'intégrale de f sur** $[a,b]$ *est le réel noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ défini par :*

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)\lambda_k,$$

où λ_k désigne la valeur prise par f sur l'intervalle $]c_k, c_{k+1}[$.

Interprétation : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est la somme des aires algébriques des rectangles définis par l'axe des abscisses et la courbe (aires comptées négativement lorsque $\lambda_k < 0$).



Proposition 3 *Le nombre $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est indépendant de la subdivision σ choisie.*

C'est-à-dire que si l'on prend une autre subdivision subordonnée à f, la valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est la même.

Démonstration :

Remarquons d'abord que si on rajoute un point à σ, l'un des rectangles est séparé en deux, mais la somme des aires des deux nouveaux rectangles est égale à l'aire du rectangle initial, donc l'intégrale ne change pas.

Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$ subordonnées à f. Notons $\sigma_1 \cup \sigma_2$ la subdivision obtenue en réunissant les points de σ_1 et de σ_2. On passe ainsi de σ_1 à $\sigma_1 \cup \sigma_2$ en ajoutant un nombre fini de points, donc, d'après la remarque précédente, l'intégrale associée à $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est égale à celle associée à σ_1. De même, elle est égale à celle associée à σ_2. Les trois intégrales sont donc égales. $\square$

4 Propriétés

Proposition 4 *(Linéarité de l'intégrale) Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

On dit que l'application $\varphi : \mathcal{E}([a,b]) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est linéaire.

Démonstration :

Soit $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ une subdivision subordonnée à la fois à f et à g. Notons λ_k et μ_k les valeurs respectives de f et de g sur $]c_k, c_{k+1}[$.
Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)(\alpha\lambda_k + \beta\mu_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)\lambda_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)\mu_k = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$. $\square$

Proposition 5 *(Positivité de l'intégrale) Soit $f \in \mathcal{E}([a,b])$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.*

Démonstration : Immédiat. $\square$

Corollaire 6 *(Croissance de l'intégrale) Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b])$. Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration : Appliquer la proposition précédente à $g - f$ et utiliser la linéarité de l'intégrale. $\square$

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

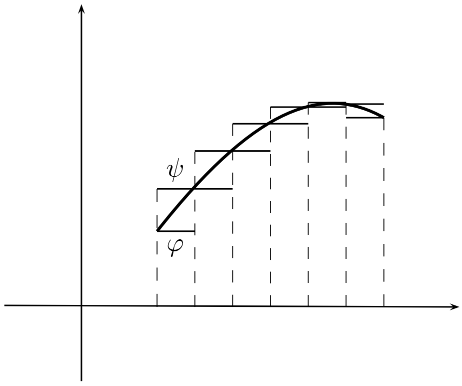
1 Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier

On admet le résultat suivant :

Proposition 7 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ φ et ψ telles que :*

$$\begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi \\ \psi - \varphi \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Autrement dit, on peut encadrer f par des fonctions en escalier d'aussi près que l'on veut.



2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Proposition 8 *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions φ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f$ et soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\psi \geqslant f$.*

Alors l'ensemble $A = \{\int_{[a,b]} \varphi \,|\, \varphi \in \mathcal{A}\}$ est majoré, l'ensemble $B = \{\int_{[a,b]} \psi \,|\, \psi \in \mathcal{B}\}$ est minoré, et $\sup A = \inf B$.

Cette borne commune est appelée **intégrale de** f **sur** $[a,b]$ *et est notée* $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

On a donc :

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leqslant f\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi \,\middle|\, \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } \psi \geqslant f\right\}.$$

Démonstration :

La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée. Soient m un minorant et M un majorant de f sur $[a,b]$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}$, on a $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant M(b-a)$, donc l'ensemble A est majoré (par conséquent il admet une borne supérieure). De même, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{B}$, on a $\int_{[a,b]} \psi \geqslant m(b-a)$, donc l'ensemble B est minoré (par conséquent il admet une borne inférieure).

Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ et $\psi \in \mathcal{B}$. Alors $\varphi \leqslant \psi$ donc $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$. Ainsi tout élément de B est un majorant de A, donc est supérieur ou égal à $\sup A$. Par conséquent, $\sup A$ est un minorant de B, et par suite $\sup A \leqslant \inf B$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 7, il existe $\varphi \in \mathcal{A}$ et $\psi \in \mathcal{B}$ tels que $\psi - \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Alors $\int_{[a,b]}(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$, donc $\int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon$. Or $\inf B \leqslant \int_{[a,b]} \psi$ et $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \sup A$, donc $\inf B \leqslant \sup A + \varepsilon$.

On a ainsi montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup A \leqslant \inf B \leqslant \sup A + \varepsilon$: on en déduit que $\inf B = \sup A$. □

Définition 4 *Soit f une fonction continue sur un segment I de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. On pose :*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{cases}.$$

On a donc $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

3 Linéarité

Proposition 9 *Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration :
Commençons par montrer que $\int_{[a,b]}(f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'intégrale, il existe des fonctions en escalier sur $[a,b]$ $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ telles que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ avec $\int_{[a,b]} \psi_1 - \int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \varepsilon/2$ et $\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2$ avec $\int_{[a,b]} \psi_2 - \int_{[a,b]} \varphi_2 \leqslant \varepsilon/2$.

On a alors $\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f + g \leqslant \psi_1 + \psi_2$, donc $\int_{[a,b]}(\varphi_1+\varphi_2) \leqslant \int_{[a,b]}(f+g) \leqslant \int_{[a,b]}(\psi_1+\psi_2)$, et on a aussi $\int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \psi_1$ et $\int_{[a,b]} \varphi_2 \leqslant \int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]} \psi_2$ donc $\int_{[a,b]}(\varphi_1+\varphi_2) \leqslant \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]}(\psi_1+\psi_2)$ (linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier).

Or $0 \leqslant \int_{[a,b]}(\psi_1+\psi_2) - \int_{[a,b]}(\varphi_1+\varphi_2) \leqslant \varepsilon$, donc $-\varepsilon \leqslant \int_{[a,b]}(f+g) - \left(\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g\right) \leqslant \varepsilon$. Cet encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\int_{[a,b]}(f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

Montrons maintenant que $\int_{[a,b]} \alpha f = \alpha \int_{[a,b]} f$. Si $\alpha = 0$ c'est immédiat. Supposons $\alpha > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des fonctions en escalier sur $[a,b]$ φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ avec $\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \varepsilon/\alpha$.

On a alors $\alpha\varphi \leqslant \alpha f \leqslant \alpha\psi$, donc $\int_{[a,b]} \alpha\varphi \leqslant \int_{[a,b]} \alpha f \leqslant \int_{[a,b]} \alpha\psi$, et on a aussi $\alpha \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \alpha \int_{[a,b]} f \leqslant \alpha \int_{[a,b]} \psi$ donc $\int_{[a,b]} \alpha\varphi \leqslant \alpha \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \alpha\psi$ par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

Or $0 \leqslant \int_{[a,b]} \alpha\psi - \int_{[a,b]} \alpha\varphi \leqslant \varepsilon$, donc $-\varepsilon \leqslant \int_{[a,b]} \alpha f - \alpha \int_{[a,b]} f \leqslant \varepsilon$. Cet encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\int_{[a,b]} \alpha f = \alpha \int_{[a,b]} f$.

Si $\alpha < 0$, on adapte le raisonnement précédent en considérant $\varepsilon/(-\alpha)$ et en modifiant le sens des inégalités si nécessaire. □

4 Positivité, croissance

Proposition 10 *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.*

Démonstration :
La fonction nulle 0 est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $0 \leqslant f$, donc par définition $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b 0\,dx = 0$. □

Corollaire 11 *Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration : Appliquer la proposition précédente à $g - f$. □

Remarque : Quand on applique ces propositions, il faut faire attention à ce que les bornes soient dans le bon sens.

Proposition 12 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive sur $[a,b]$ et que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors $f = 0$.*

Démonstration :
On va raisonner par l'absurde : supposons que f est non nulle. Il existe donc un $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$.

Or f est continue en x_0, donc il existe un voisinage $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ de x_0 dans $[a,b]$ tel que $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ pour tout $x \in V$.

Soit la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ si $x \notin V$ et $g(x) = \frac{f(x_0)}{2}$ si $x \in V$. Alors on a $f \geqslant g$ sur $[a,b]$, donc $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx = \delta f(x_0) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Conclusion : f est la fonction nulle. □

Remarque : Le théorème n'est pas valable pour les fonctions en escalier. Par exemple, la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$ est positive et son intégrale sur $[0,1]$ est nulle, mais f n'est pas nulle.

5 Relation de Chasles

Proposition 13 *Soit f une fonction continue sur un segment I de $\mathbb{R}$. Soient $a, b, c \in I$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration :

On démontre d'abord la proposition lorsque $a < c < b$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ avec $\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \varepsilon$.

Notons f_1 et f_2 (respectivement φ_1 et φ_2, ψ_1 et ψ_2) les restrictions de f (repectivement de φ, de ψ) aux segments $[a,c]$ et $[c,b]$. Alors $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont également en escalier, et en revenant à la définition on voit que $\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_1 + \int_{[c,b]} \varphi_2$ et que $\int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,c]} \psi_1 + \int_{[c,b]} \psi_2$.

De plus on a $\varphi_1 \leqslant f_1 \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant f_2 \leqslant \psi_2$, donc $\int_{[a,c]} \varphi_1 \leqslant \int_{[a,c]} f_1 \leqslant \int_{[a,c]} \psi_1$ et $\int_{[c,b]} \varphi_2 \leqslant \int_{[c,b]} f_2 \leqslant \int_{[c,b]} \psi_2$. En additionnant, on obtient l'encadrement $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,c]} f_1 + \int_{[c,b]} f_2 \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.

On en déduit que $-\varepsilon \leqslant \int_{[a,b]} f - \left(\int_{[a,c]} f_1 + \int_{[c,b]} f_2\right) \leqslant \varepsilon$. Cet encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_1 + \int_{[c,b]} f_2$.

On étudie ensuite les cas où a, b, c sont ordonnés différemment en se ramenant au cas précédent. $\square$

6 Intégrale et valeur absolue

Proposition 14 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Démonstration :

$|f|$ est continue sur $[a,b]$ par continuité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, on a $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, donc $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$ et donc $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$. $\square$

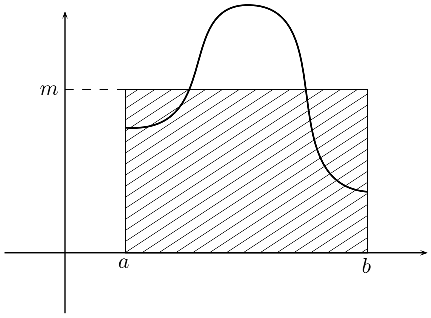
Remarque : Il faut faire attention à ce que les bornes soient dans le bon ordre.

7 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 5 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle* **valeur moyenne de f sur** $[a,b]$ *le réel :*

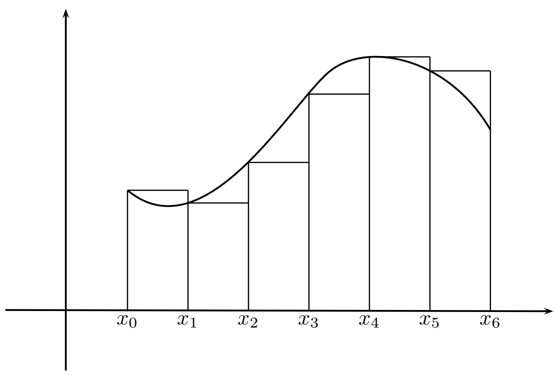
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Interprétation : m est la valeur de la fonction constante ayant même intégrale sur $[a,b]$ que f.



8 Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'idée est ici d'approximer $\int_a^b f(x)dx$ par une somme d'aires de rectangles.



Soit n un entier naturel non nul. Considérons la subdivision régulière $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ où $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Les intervalles de cette subdivision sont de longueur $\dfrac{b-a}{n}$.

L'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$ est $(x_{k+1} - x_k)f(x_k) = \dfrac{b-a}{n} f(x_k)$ et la somme des aires de ces rectangles est $S_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Définition 6 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La* **somme de Riemann associée à** f *est*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Proposition 15 *La suite (S_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*

Démonstration : (uniquement dans le cas où la fonction f est lipschitzienne sur $[a, b]$, le cas général est hors-programme)
Étudions d'abord le cas où il n'y a qu'un seul rectangle : $S_1 = (b-a)f(a)$.
En écrivant que $(b-a)f(a) = \displaystyle\int_a^b f(a)\,dx$, on a $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - S_1\right| = \left|\displaystyle\int_a^b (f(x) - f(a))\,dx\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(x) - f(a)|\,dx$.
La fonction f est lipschitzienne sur $[a, b]$ donc il existe un réel positif M tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ pour tous $x, y \in [a, b]$. Par conséquent $\displaystyle\int_a^b |f(x) - f(a)|dx \leqslant \int_a^b M|x - a|\,dx = \frac{M(b-a)^2}{2}$.

On revient maintenant au cas n quelconque. En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$.
On a donc $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - (x_{k+1} - x_k)f(x_k)\right)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - (x_{k+1} - x_k)f(x_k)\right|$.
Or, d'après l'étude précédente, on a $\left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - (x_{k+1} - x_k)f(x_k)\right| \leqslant \dfrac{M(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \dfrac{M(b-a)^2}{2n^2}$.
Par conséquent $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M(b-a)^2}{2n}$, et le théorème des gendarmes permet de conclure. □

Remarque : Si $[a, b] = [0, 1]$, la formule devient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 1 Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$.

9 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 7 *Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. On définit* **l'intégrale de** f **sur** $[a, b]$ *par :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(x)\,dx + i\int_a^b (\operatorname{Im} f)(x)\,dx.$$

Les propriétés suivantes restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes : linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ (où $a \leqslant b$).

Démonstration : On démontre la dernière inégalité, le reste est facile. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, c'est immédiat. Supposons que cette intégrale est non nulle. Posons $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. Alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| = \rho = e^{-i\theta} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,dx$.
Soient $u = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$ et $v = \operatorname{Im}(e^{-i\theta} f)$. Alors $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx$ (c'est un réel) et $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |e^{-i\theta} f(x)|\,dx = \int_a^b \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2}\,dx$.
Or pour tout $x \in [a, b]$ on a $u(x) \leqslant |u(x)| \leqslant \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2}$ donc $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$. □

III Primitives d'une fonction continue

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Les fonctions considérées sont à valeurs réelles mais les résultats restent valables pour des fonctions à valeurs complexes.

1 Définition

Définition 8 *Soit f une fonction continue sur I. Une* **primitive de** f **sur** I *est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.*

Proposition 16 *Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.*

Cela signifie que si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_1 = F_2 + c$. On ne dira donc jamais *la* primitive de f mais *une* primitive de f.

Démonstration :
Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I. Alors $F_1' = F_2' = f$, donc $(F_1 - F_2)' = 0$, et donc $F_1 - F_2$ est constante sur I. $\square$

Remarque : Les primitives se prennent sur un intervalle et pas sur une réunion d'intervalles.

2 Théorème fondamental de l'analyse

Le théorème suivant fait le lien entre les notions d'intégrale et de primitive, donc entre l'intégration et la dérivation.

Théorème 17 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I.

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) - f(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - hf(x_0)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt.
\end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| = |h| \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)|$$

donc :

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)|.$$

Or f est continue en x_0, donc $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \sup\limits_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)| = 0$. Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \left|\dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = 0$, d'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$. $\square$

Corollaire 18 *Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.*

Corollaire 19 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

que l'on note $[F(x)]_a^b$.

Démonstration :
D'après le théorème 17, la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$. La fonction F aussi. Il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F = G + c$. Or $G(a) = 0$, donc $F(a) = c$. On a ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$. $\square$

Remarque : La notation $\int f(x)\,dx$ (intégrale indéfinie) désigne une primitive quelconque de f.

3 Techniques de calcul de primitives

• Intégration par parties, changement de variable (rappels)

Proposition 20 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Soient $a, b \in I$. Alors :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Pour les intégrales indéfinies on a :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Proposition 21 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Deux applications de la formule du changement de variable :

Proposition 22 *Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, et si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.*

Démonstration : Par la relation de Chasles on a

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx,$$

et le changement de variable $y = -x$ dans la première intégrale donne

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-y)\,dy = \int_0^a f(-y)\,dy = \int_0^a f(-x)\,dx = \begin{cases} \int_0^a f(x)\,dx & \text{si } f \text{ est paire} \\ -\int_0^a f(x)\,dx & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}.$$

Le résultat s'ensuit. □

Proposition 23 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Démonstration : Par la relation de Chasles on a

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

Dans la dernière intégrale on effectue le changement de variable $y = x - T$:

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(y+T)\,dy = \int_0^a f(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx.$$

Le résultat s'ensuit. □

Exercice 2 Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx \;\; ; \;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \;\; ; \;\; \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \;\; ; \;\; \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \;\; ; \;\; \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} \;\; ; \;\; \int \frac{dx}{\operatorname{th} x}.$$

• Polynômes en sinus et cosinus

Soit à déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos^p x \sin^q x$ ($p, q \in \mathbb{N}$).

Si p ou q est impair, alors on peut mettre $f(x)$ sous la forme $P(\cos x)\sin x$ ou $P(\sin x)\cos x$ (en utilisant éventuellement la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$) et le changement de variable $y = \cos x$ ou $y = \sin x$ permet de conclure.

Si p et q sont pairs, alors on peut soit passer à l'angle double (avec $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ ou $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$), soit linéariser à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx.$$

• Polynômes en e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$

On passe aux exponentielles et on utilise le fait que $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ et $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$. On peut aussi intégrer deux fois par parties.

Exercice 4 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \mapsto e^x \cos x$ et $x \mapsto e^x \operatorname{ch} x$.

• Produit d'un polynôme et de e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$ ou $\sin x$

On effectue une ou plusieurs intégrations par parties successives afin de diminuer le degré du polynôme (on dérive donc le polynôme et on intègre l'autre fonction).

Exercice 5 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-3x}$.

IV Formules de Taylor

1 Formule de Taylor avec reste intégral (non exigible)

Théorème 24 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$: On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour tout $x \in I$ on a :

$$f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^x f^{(1)}(t)(x-t)^0 dt = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x),$$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le théorème vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$. On suppose donc que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. Par hypothèse de récurrence on a, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \qquad (*)$$

On va intégrer par parties : on pose $u(t) = f^{(n+1)}(t)$, donc $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$, et pour avoir $v'(t) = (x-t)^n$ on prend $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt\end{aligned}$$

Par conséquent, $(*)$ devient :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt\right) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

La formule de Taylor avec reste intégral donne l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ sous forme d'une intégrale. En majorant ou en encadrant cette intégrale on peut ainsi obtenir une majoration ou un encadrement de $f(x) - T_n(x)$.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 25 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Soit $a \in I$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I, alors, pour tout $x \in I$, on a :*

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$

où $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Démonstration :

D'après la formule de Taylor avec reste intégral on a $|f(x) - T_n(x)| = \dfrac{1}{n!}\left|\displaystyle\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\right|$.

Supposons $x \geqslant a$. Alors :

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^x \left|f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\right| dt \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^x M(x-t)^n dt = \frac{M}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{M}{n!}\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $x < a$ les calculs sont analogues mais on commence par remettre les bornes dans le bon ordre. □

Cette inégalité permet d'obtenir des encadrements. On notera que pour $n = 0$ on retrouve l'inégalité des accroissements finis. Noter également que ce théorème et le précédent restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice 5 Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'encadrement $1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

Exercice 6 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

3 Formule de Taylor-Young (rappel)

Théorème 26 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors f admet un DL d'ordre n en tout point $a \in I$. Plus précisément, au voisinage de a, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Démonstration :

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$ pour tout $x \in I$.

L'idée est d'écrire $\displaystyle\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = \int_a^x f^{(n)}(a)(x-t)^{n-1}dt + \int_a^x (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))(x-t)^{n-1}dt$. La première intégrale vaut $f^{(n)}(a)\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n-1}dt = f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n}$.

Soit $x \geqslant a$. Puisque $f^{(n)}$ est continue sur $[a,x]$, elle y est bornée. Posons $M(x) = \displaystyle\sup_{a\leqslant t\leqslant x} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)|$.

Alors $\left|\displaystyle\int_a^x (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))(x-t)^{n-1}dt\right| \leqslant \int_a^x |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)|(x-t)^{n-1}dt \leqslant \int_a^x M(x)(x-t)^{n-1}dt = \frac{M(x)(x-a)^n}{n}$.

Si $x \leqslant a$, on obtient $\left|\displaystyle\int_a^x (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))(x-t)^{n-1}dt\right| \leqslant \frac{M(x)(-1)^n(x-a)^n}{n}$ avec $M(x) = \displaystyle\sup_{x\leqslant t\leqslant a} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)|$.

Or $M(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a (par continuité de $f^{(n)}$), donc $\dfrac{M(x)(x-a)^n}{n} \overset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$.

On obtient ainsi $f(x) \overset{x\to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$: c'est ce qu'on voulait. □