Fiche d'exercices : Intégration

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx \ ;\ \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx \ ;\ \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx \ ;\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} \ ;\ \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{1+2x^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x} \ ;\ \int_1^e \frac{dx}{x+x\ln^2 x} \ ;\ \int_a^b \lfloor x\rfloor\,dx\ (a,b\in\mathbb{Z}) \ ;\ \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,dx \ ;\ \int_0^1 \frac{dx}{x-i}.$$

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt$.

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$ à l'aide du changement de variable $y=\dfrac{\pi}{4}-x$.

Exercice 4 Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,dt$.

Exercice 5 Calculer les limites lorsque $n\to+\infty$ des expressions suivantes :

1. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$
4. $\displaystyle\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$
5. $\displaystyle\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
6. $\displaystyle\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{1/n}$

Exercice 6 Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 7 Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée seconde.

Exercice 8 Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 9 *(Formule de la moyenne)* Soient $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt=f(c)\int_a^b g(t)dt$.

Exercice 10 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)* Soient $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. En considérant $\displaystyle\int_a^b (f-\lambda g)^2$ où $\lambda\in\mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2\leqslant\int_a^b f^2\times\int_a^b g^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 11 *(Intégrale de Poisson)* Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos t+1)\,dt$ à l'aide des sommes de Riemann.

Exercice 12 *(Inégalité de Jensen)* Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. À l'aide des sommes de Riemann, montrer que $\displaystyle\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\,dx$.

Exercice 13 *(Lemme de Riemann-Lebesgue)* Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)dt=0$.

Exercice 14 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $T=(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=T+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx$.

2) En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx-T\right|\leqslant\frac{M_2(b-a)^3}{12}$ où $\displaystyle M_2=\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

Exercice 15 Calculer $\displaystyle I_n=\int_0^1(1-t^2)^n dt$ pour tout entier naturel n.

Exercice 16 Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ de deux manières différentes et en déduire une formule.

Exercice 17 Étudier la suite (I_n) où $\displaystyle I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$.

Exercice 18 Étudier la suite (I_n) où $\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$ (pour avoir un équivalent, on pourra utiliser l'inégalité $\ln(1+x)\leqslant x$ valable pour tout $x>-1$).

Exercice 19 Étudier la fonction f définie par $\displaystyle f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$: ensemble de définition, parité, variations, limites, DL en 0, courbe représentative.

Exercice 20 Étudier la fonction f définie par $\displaystyle f(x)=\int_x^{2x}e^{-t^2}dt$.

Exercice 21 Étudier la fonction f définie par $\displaystyle f(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}dt$.

Exercice 22 Étudier la fonction f définie par $\displaystyle f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{1-t}dt$.

Exercice 23 Calculer $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\mathrm{Arcsin}\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\mathrm{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.

Exercice 24 À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, calculer une valeur approchée à 10^{-10} près de $\ln 1{,}01$.

Exercice 25 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2$.