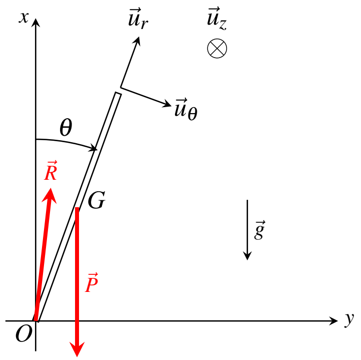
Corrigé DM21

Exercice 1 : Chute d'une cheminée

1. La cheminée est soumise à son poids et à la réaction du sol, de direction inconnue mais dont le point d'application est en O (voir schéma ci-dessous).



On applique le TMC par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z(\vec{P}) + \mathscr{M}_z(\vec{R})$$

Le moment de la réaction est nul car son point d'application est le point O. Le moment du poids vaut :

$$\mathscr{M}_z(\vec{P}) = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = \left[\frac{L}{2}\vec{u}_r \wedge Mg\left(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right)\right] \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{2}MgL\sin\theta$$

Le moment cinétique de la cheminée vaut $L_z = J_z\dot{\theta} \implies \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$. Finalement, le TMC donne :

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}MgL\sin\theta \implies \boxed{\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin\theta}$$

Il n'y a aucun intérêt à linéariser cette équation pour de petits angles θ puisque l'angle ne reste faible qu'au tous premiers instants du mouvement.

2. L'énergie cinétique de la cheminée vaut $E_c = \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2$. Son énergie potentielle vaut $E_p = Mgh$ où h est l'altitude du centre d'inertie G, ce qui donne : $E_p = Mg\frac{L}{2}\cos\theta$.

Le poids est conservatif et la réaction ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

À l'instant initial, $E_c = 0$ et $E_p = mg\frac{L}{2}$ d'où :

$$E = \mathrm{Cste} = mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \iff \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}\left(1-\cos\theta\right)}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{1}{6}ML^2\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) - Mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \implies \boxed{\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} - \frac{3g}{2L}\sin\theta\right) = 0}$$

On retrouve bien l'équation du mouvement.

3. On applique le PFD en coordonnées cylindriques, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le centre d'inertie est en mouvement circulaire de rayon $\frac{L}{2}$.

$$\begin{aligned}
M\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R} \implies \vec{R} &= M\vec{a}_G - \vec{P} \\
&= M\left(-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right) - Mg\left(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right) \\
&= \left(Mg\cos\theta - M\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(-Mg\sin\theta + M\frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta
\end{aligned}$$

On remplace $\ddot{\theta}$ en utilisant le résultat de la question 1 et $\dot{\theta}^2$ avec le résultat de la question 2. On trouve :

$$\boxed{\vec{R} = Mg\left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos\theta\right)\vec{u}_r - \frac{1}{4}\sin\theta\vec{u}_\theta\right]}$$

4. La cheminée décolle du sol lorsque la réaction normale s'annule, c'est-à-dire lorsque $R_x = 0$. On trouve la réaction normale en projetant $\vec{R}$ sur $\vec{u}_x$:

$$\begin{aligned}
R_x &= \vec{R} \cdot \vec{u}_x \\
&= Mg\left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos\theta\right)\vec{u}_r - \frac{1}{4}\sin\theta\vec{u}_\theta\right] \cdot \left(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta\right) \\
&= Mg\left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos\theta\right)\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right] \\
&= Mg\left(-\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{5}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
&= \frac{Mg}{4}\left(-6\cos\theta + 10\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{Mg}{4}\left(1 - 6\cos\theta + 9\cos^2\theta\right) \\
&= \frac{Mg}{4}\left(1 - 3\cos\theta\right)^2
\end{aligned}$$

La cheminée décolle lorsque R_x s'annule, c'est-à-dire pour $\cos\theta = \frac{1}{3} \implies \boxed{\theta = 71^\circ}$.