

# TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

## Application 1

1. La masse volumique vaut :  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{n} \times \frac{n}{V} \iff \rho = \frac{M}{V_m} = 0,72 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Attention aux unités** : pour obtenir la masse volumique en unités SI il faut convertir le volume molaire en  $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  et la masse molaire en  $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On peut ainsi vérifier rapidement que la formule est homogène.

La densité particulaire vaut :  $n^* = \frac{N}{V} = \frac{n \cdot N_A}{V} \iff n^* = \frac{N_A}{V_m} = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ .

2. La densité particulaire du mercure vaut :  $n^* = \frac{N_A}{V_m} = \frac{\rho \cdot N_A}{M} = 4,1 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Le nombre d'atomes dans un litre de mercure vaut :  $N = n^* V = 4,1 \cdot 10^{25}$  atomes.

3. On considère un matériau de volume  $V$  qui contient  $N$  particules. Le volume moyen occupé par chaque particule vaut :  $\delta V = \frac{V}{N} = \frac{1}{n^*}$ . Si l'on assimile chaque volume à un cube alors la distance moyenne entre deux particules vaut :  $d = \delta V^{1/3} = (n^*)^{-1/3}$ .

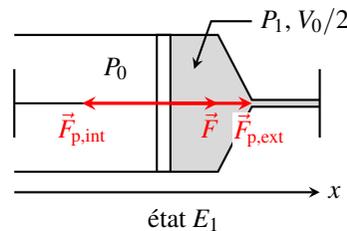
On effectue l'application numérique pour la vapeur d'eau :  $d_{\text{ve}} = 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  et le mercure :  $d_{\text{Cu}} = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . La distance moyenne est du même ordre que le libre parcours moyen pour le mercure liquide ( $\ell \sim 10^{-10} \text{ m}$ ), mais elle est beaucoup plus faible pour la vapeur d'eau gazeuse ( $\ell \sim 10^{-7} \text{ m}$ ). Pour le comprendre il faut comparer la taille des particules à la distance moyenne qui les sépare. Dans un liquide les particules sont mobiles mais quasiment au contact les unes des autres, tandis que dans un gaz elles ont une taille très faible comparée à la distance qui les sépare, ainsi elles peuvent se déplacer sur une grande distance avant d'entrer en contact avec d'autres particules.

## Application 2

1. On applique la loi des gaz parfaits pour calculer la quantité de matière, en étant vigilant aux **unités**. Le volume vaut  $V_0 = 20 \text{ cm}^3 = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ , la température vaut  $T_0 = 293 \text{ K}$ , la pression vaut  $P_0 = 1,0 \text{ bar} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . On trouve alors :  $n_0 = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ .

2. On note  $P_1$  la pression à l'intérieur de la seringue dans l'état  $E_1$ . Le piston est soumis aux forces pressantes  $\vec{F}_{p,\text{int}} = -P_1 S \vec{u}_x$  de l'air intérieur et  $\vec{F}_{p,\text{ext}} = P_0 S \vec{u}_x$  de l'air extérieur, ainsi qu'à la force  $\vec{F} = F \vec{u}_x$  exercée par l'opérateur. On traduit l'équilibre mécanique du piston :

$$-P_1 S + F + P_0 S = 0 \iff F = (P_1 - P_0) S$$



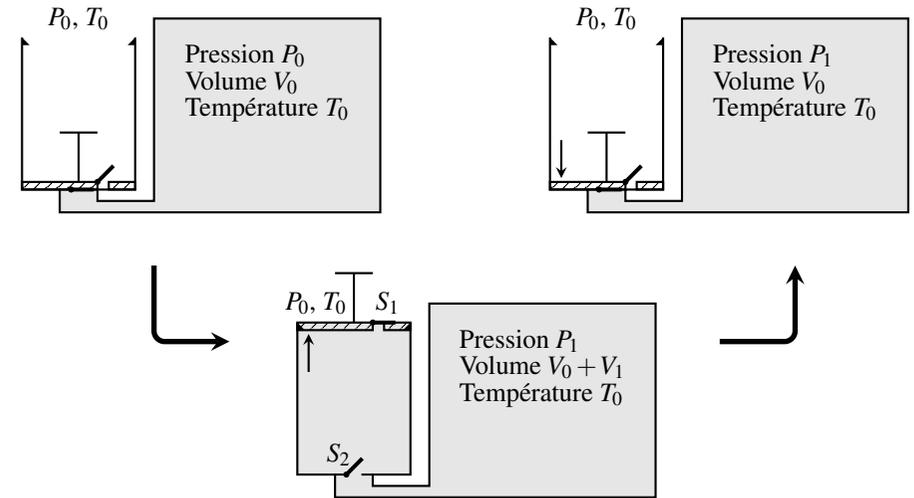
On détermine  $P_1$  en appliquant la loi des gaz parfaits dans les états  $E_0$  et  $E_1$ . On traduit notamment le fait que la quantité de gaz et la température se conservent entre ces deux états :  $nRT_0 = P_0 V_0 = P_1 \frac{V_0}{2} \iff P_1 = 2P_0$ . On conclut :  $F = P_0 S = 20 \text{ N}$ .

Dans le cas où l'on veut augmenter le volume d'air dans la seringue il faut tirer sur le piston et non le pousser. On écrit  $\vec{F} = -F \vec{u}_x$  et l'équilibre mécanique du piston se traduit par :

$$-P_2 S - F + P_0 S = 0 \iff F = (P_0 - P_2) S$$

D'après la loi des gaz parfaits :  $nRT_0 = P_0 V_0 = P_2 \times 2V_0 \iff P_2 = \frac{P_0}{2} \implies F = \frac{P_0 S}{2} = 10 \text{ N}$ .

## Application 3



1. Au cours de la montée du piston le clapet  $S_2$  s'ouvre et l'air du réservoir entre dans le cylindre. Le clapet  $S_2$  est ouvert et  $S_1$  est fermé. Lorsque le piston redescend  $S_2$  se ferme et  $S_1$  s'ouvre. Tout l'air contenu dans  $C$  s'échappe à l'extérieur.

Pendant la montée  $S_1$  est fermé donc la quantité d'air dans  $R + C$  se conserve. On écrit la loi des gaz parfaits pour cette quantité  $n_0$ , initialement à la pression  $P_0$  dans le volume  $V_0$  puis, dans l'état intermédiaire, à la pression  $P_1$  dans le volume  $V_0 + V_1$  :

$$n_0 RT_0 = P_0 V_0 = P_1 (V_0 + V_1) \iff P_1 = \frac{V_0}{V_0 + V_1} P_0$$

2. Le même raisonnement permet de relier  $P_1$  et  $P_2$  (on note  $n_1$  la quantité d'air présente dans le réservoir de pression  $P_1$ ) :

$$n_1 RT_0 = P_1 V_0 = P_2 (V_0 + V_1) \iff P_2 = \frac{V_0}{V_0 + V_1} P_1 = \left( \frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^2 P_0$$

3. La pression dans le cylindre suit une loi géométrique de raison  $\frac{V_0}{V_0 + V_1} < 1$ . Elle tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Le terme général s'écrit :  $P_n = \left( \frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n P_0$ .

## TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

4. On exprime le nombre de coups de pompes qui permet d'obtenir une pression  $P$  donnée dans le réservoir :

$$n \ln \frac{V_0}{V_0 + V_1} = \ln \frac{P}{P_0} \iff n = \frac{\ln \frac{P}{P_0}}{\ln \frac{V_0}{V_0 + V_1}}$$

AN :  $n = 73 (10^2 \text{ Pa})$  ,  $n = 121 (1 \text{ Pa})$  et  $n = 170 (10^{-2} \text{ Pa})$ .

### Application 4

Avant de déterminer le déplacement du piston on cherche à décrire l'état d'équilibre final dans les deux compartiments. Il y a **six inconnues** à déterminer :  $P_1, V_1, T_1, P_2, V_2, T_2$ . On cherche un système de six équations reliant ces inconnues entre elles :

- Les parois de l'enceinte sont diathermes donc dans l'état final le gaz de chaque compartiment est en **équilibre thermique avec l'extérieur** :  $T_1 = T_0 (1)$  et  $T_2 = T_0 (2)$  ;
- l'enceinte est indéformable donc **le volume total se conserve** :  $V_1 + V_2 = 2V_0 (3)$  ;
- Le piston est soumis à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  (vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  vertical ascendant) et aux forces pressantes exercées par le gaz de part et d'autre  $\vec{F}_1 = -P_1S\vec{u}_z$  et  $\vec{F}_2 = P_2S\vec{u}_z$ . Dans l'état final il est en **équilibre mécanique**, ce qui se traduit par :

$$P_2S - P_1S - mg = 0 \iff P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} \iff P_2 = P_1 + P_0 (4)$$

- le piston est étanche donc la quantité de matière se conserve dans chaque compartiment. Sachant que  $T_1 = T_2 = T_0$  on obtient à l'aide de la loi des gaz parfaits :  $P_1V_1 = P_0V_0 (5)$  et  $P_2V_2 = P_0V_0 (6)$ .

On résout le système. Les températures sont déjà connues, il reste à déterminer les pressions et les volumes. On utilise l'équation (4) pour isoler  $V_1$  :

$$P_2 = P_1 + P_0 \iff \frac{P_0V_0}{V_2} = \frac{P_0V_0}{V_1} + P_0 \iff \frac{P_0V_0}{2V_0 - V_1} = \frac{P_0V_0}{V_1} + P_0 \iff \frac{1}{2V_0 - V_1} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_0}$$

Après simplifications on trouve  $V_1 = \sqrt{2}V_0$ . À partir de ce résultat on obtient rapidement les trois derniers :

$$V_2 = (2 - \sqrt{2})V_0 \quad ; \quad P_1 = \frac{P_0}{\sqrt{2}} \quad ; \quad P_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)P_0$$

On détermine maintenant le déplacement du piston. On mesure son altitude  $z$  à partir du pied de l'enceinte. Son altitude initiale est  $z_0 = \frac{V_0}{S}$  et son altitude finale  $z = \frac{V_2}{S}$ . Son déplacement est donc :

$$\Delta z = \frac{V_2 - V_0}{S} \iff \Delta z = (1 - \sqrt{2})\frac{V_0}{S}$$

### Application 5

1. Le travail électrique consommée par la résistance chauffante vaut  $W = RI^2\Delta t = 216 \text{ J}$ .

2. On note  $(P_0, T_0, V_0)$  l'état initial du gaz et  $(P_1, V_0, T_1)$  l'état final. Le dihydrogène est un gaz parfait diatomique donc sa variation d'énergie interne s'écrit :  $\Delta U = C_V\Delta T = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0)$ . On détermine la quantité de matière avec la loi des gaz parfaits :  $nR = \frac{P_0V_0}{T_0}$ . D'après l'énoncé le gaz absorbe l'intégralité de l'énergie consommée par la résistance d'où  $\Delta U = W$ , ce qui permet de calculer la température finale :

$$\Delta U = \frac{5P_0V_0}{2T_0}(T_1 - T_0) = W \iff T_1 = T_0 \left(1 + \frac{2W}{5P_0V_0}\right) = 310 \text{ K} = 37^\circ \text{ C}$$

On détermine la pression finale. La quantité et le volume de gaz sont constants donc :

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_1}{T_1} \iff P_1 = \frac{T_1}{T_0}P_0 = 1,06 \text{ bar}$$

### ★ Exercice 1 : Pompe à air

L'enceinte a un volume et une température fixées. La pression augmente car on injecte de la matière à l'intérieur de l'enceinte, ce qui accroît la **quantité de matière en air**. Pour déterminer la pression dans l'enceinte, nous allons calculer la quantité de matière totale en air qui s'y trouve après  $N$  aller-retours du piston. Initialement, il y a déjà de l'air dans l'enceinte puisque la pression est non nulle. D'après la loi des gaz parfaits, la quantité initiale  $n_0$  en air vaut :

$$n_0 = \frac{P_0V_0}{RT}$$

Au cours d'un aller-retour du piston, **la totalité** de l'air qui se trouve dans le réservoir s'écoule dans l'enceinte. Dans le réservoir, l'air occupe un volume  $V_1$  à la pression  $P_0$ . La quantité de matière qui entre dans l'enceinte à chaque aller-retour du piston vaut donc :

$$n_1 = \frac{P_0V_1}{RT}$$

Après  $N$  aller-retour du piston, la quantité de matière en air dans l'enceinte vaut :

$$n_{\text{air}} = n_0 + Nn_1 = \frac{P_0(V_0 + NV_1)}{RT}$$

et la pression vaut :

$$P = \frac{n_{\text{air}}RT}{V_0} = P_0 \left(1 + N\frac{V_1}{V_0}\right) = 1,2 \text{ bar}$$

### ★ Exercice 2 : Déplacement d'un piston par chauffage

1. Il y a trois inconnues à déterminer :  $V_{Af}, V_{Bf}$  et la pression finale  $P_f$  (l'énoncé admet déjà l'égalité des pressions de part et d'autre du piston, qui est une conséquence de l'équilibre mécanique final). Il s'agit donc de trouver trois relations entre ces grandeurs pour fermer le système :

# TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

- les deux enceintes contiennent un gaz parfait donc à l'état final :

$$V_{Af} = \frac{nRT_f}{P_f} \quad (1) \quad \text{et} \quad V_{Bf} = \frac{nRT_f}{P_f} \quad (2)$$

- Le cylindre est indéformable donc le volume total se conserve :

$$V_{Af} + V_{Bf} = 2V_0 \quad (3) \iff \frac{nR}{P_f}(T_1 + T_0) = 2V_0 \iff P_f = \frac{nR(T_1 + T_0)}{2V_0}$$

Enfin, en utilisant la loi des gaz parfaits à l'état initial (la même dans les deux compartiments), on écrit  $nR = \frac{P_0 V_0}{T_0}$ , ce qui permet de conclure :

$$P_f = \frac{T_1 + T_0}{2T_0} P_0$$

On détermine les volumes  $V_{Af}$  et  $V_{Bf}$  grâce aux équations (1) et (2) :

$$V_{Af} = \frac{2T_1}{T_1 + T_0} V_0$$

et

$$V_{Bf} = \frac{2T_0}{T_1 + T_0} V_0$$

2. Chaque compartiment contient un gaz parfait diatomique donc  $C_V = \frac{5}{2}nR$ . La variation d'énergie interne du gaz contenu dans chaque enceinte vaut :

$$\Delta U_A = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0)$$

et

$$\Delta U_B = \frac{5}{2}nR(T_0 - T_0) = 0$$

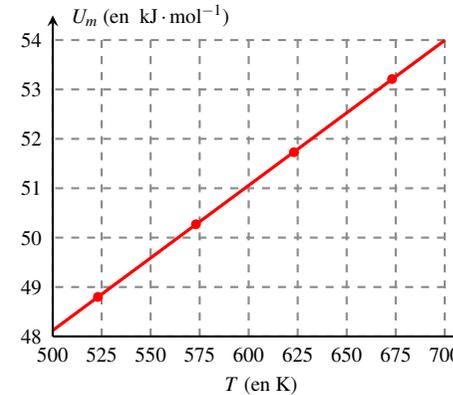
L'énergie interne est une grandeur **extensive** donc :  $\Delta U_{A+B} = \Delta U_A + \Delta U_B = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0)$ .

### ★ Exercice 3 : Énergie interne d'un gaz parfait et d'un gaz réel

1. On commence par relier l'énergie interne molaire ( $U_m = \frac{U}{n}$ ) à l'énergie interne molaire massique ( $u = \frac{U}{m}$ ) :

$$U_m = \frac{U}{n} = \frac{U}{m} \times \frac{m}{n} = uM$$

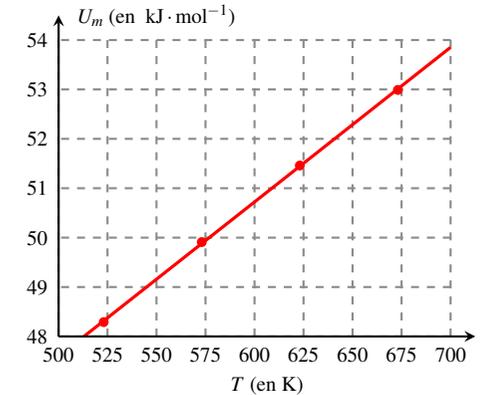
avec  $M$  la masse molaire de l'eau. On trace ci-dessous les variations de  $U_m$  avec la température, ainsi que les modèles affines obtenus par régression pour chacune des deux pressions.



$$U_m = aT + b$$

$$a = 29,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$r = 0,999997$$



$$U_m = aT + b$$

$$a = 31,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$r = 0,999912$$

En théorie, pour un gaz parfait monoatomique, la relation entre l'énergie interne et la température s'écrit sous la forme :

$$U_m(T) = C_{V,m}T = \frac{3}{2}RT$$

La relation  $U_m(T)$  est donc théoriquement affine, avec un coefficient directeur indépendant de la pression

$$a = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

D'après les données expérimentales, la relation  $U_m(T)$  pour la vapeur d'eau est bien affine, mais le coefficient directeur est très différent de celui du modèle du gaz parfait monoatomique. On pouvait s'y attendre pour de la vapeur d'eau qui n'est effectivement pas un gaz monoatomique.

2. Pour un gaz parfait, la relation  $U_m(T)$  doit être affine et le coefficient directeur, qui s'identifie à la capacité thermique molaire à volume constant, doit être indépendant de la pression, **d'après la première loi de Joule**. Pour la vapeur d'eau, on constate que  $C_{V,m}$  dépend légèrement de la pression. Dans ce domaine de températures et de pressions, **le comportement de la vapeur d'eau n'est pas celui d'un gaz parfait, mais il en est proche.**

### ★ Exercice 4 : État d'équilibre final

Dans cet exercice on notera avec l'indice  $f$  les grandeurs à l'état final. Il s'agit de déterminer l'état d'équilibre final dans chacune des deux enceintes, ce qui signifie qu'il y a six inconnues :  $P_{1f}, V_{1f}, T_{1f}, P_{2f}, V_{2f}, T_{2f}$ .

Dans ce type d'exercice, il est nécessaire d'établir un système contenant autant d'équations que d'inconnues, afin d'arriver au bout du calcul. Chacune de ces équations vient d'une donnée de l'énoncé. Nous allons faire l'inventaire de toutes les relations que l'on peut écrire entre ces différentes grandeurs :

- le piston est libéré, ce qui signifie qu'à l'état final, il est en équilibre mécanique :  $P_{1f} = P_{2f}$ . Par la suite, on notera  $P_f$  cette pression commune ;

## TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

- les parois de l'enceinte sont diathermes donc les gaz des deux compartiments sont en équilibre thermique avec l'extérieur à l'état final :  $T_{1f} = T_{2f} = T_0 = 300\text{K}$  ;
- le gaz de chaque enceinte est un gaz parfait, donc à l'état d'équilibre final :

$$V_{1f} = \frac{n_1 RT_0}{P_f} \quad (1) \quad \text{et} \quad V_{2f} = \frac{n_2 RT_0}{P_f} \quad (2)$$

- Le cylindre est indéformable donc le volume total se conserve :

$$V_1 + V_2 = V_{1f} + V_{2f} = \frac{(n_1 + n_2)RT_0}{P_f} \iff P_f = \frac{(n_1 + n_2)RT_0}{V_1 + V_2} = 1,2 \text{ bar}$$

On conclut en calculant les volumes :

$$V_{1f} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2) = 1,0 \text{ L} \quad \text{et} \quad V_{2f} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2) = 2,0 \text{ L}$$

### ★ Exercice 5 : Mesure de la capacité thermique du dioxygène

En assimilant le dioxygène à un gaz parfait, on peut écrire :  $\Delta U = C_V \Delta T$ . On évalue la capacité thermique à volume constant à partir des résultats expérimentaux :

$$C_V = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Pour déterminer la capacité thermique molaire à volume constant, il faut diviser  $C_V$  par la quantité de matière en gaz à l'intérieur de l'ampoule, que l'on peut déterminer avec la loi des gaz parfaits :

$$n = \frac{pV}{RT} = 6,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \iff C_{Vm} = \frac{C_V}{n} = 21 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On en déduit la valeur de la capacité thermique massique à volume constant :

$$c_V = \frac{C_V}{m} = \frac{C_V}{n} \times \frac{n}{m} \iff c_V = \frac{C_{Vm}}{M} = 6,6 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En théorie un gaz parfait diatomique possède une capacité thermique molaire à volume constant égale à  $C_{Vm} = \frac{5}{2}R = 21 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . La valeur expérimentale obtenue est tout à fait compatible avec le modèle du gaz parfait diatomique pour le dioxygène, dans ces conditions de température et de pression.

### ★ Exercice 6 : Étude d'un gaz réel de Clausius

1.  $PV = nRT$ . Un gaz est parfait si l'on peut négliger le volume des particules qui le composent, ainsi que les interactions à distance entre elles.

2.a) Pour une quantité de matière  $n$  quelconque, le volume vaut  $V = nV_m$  donc :

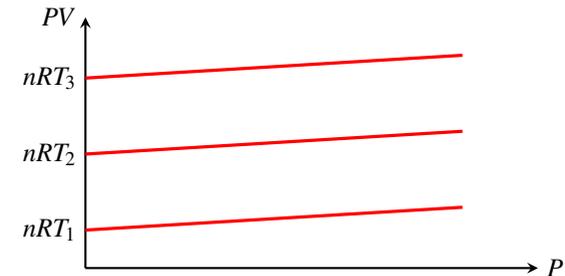
$$P \left( \frac{V}{n} - b \right) = RT \iff P(V - nb) = nRT$$

2.b) On raisonne par analogie avec l'équation d'état de Van der Waals. Le gaz de Clausius est intermédiaire entre le gaz parfait et le gaz de Van der Waals. Dans cet équation, le seul terme correctif porte sur le volume. Cela signifie que dans un gaz de Clausius, on continue de négliger les interactions à distance entre particules. En revanche, on ne néglige plus le volume propre des particules.

2.c) D'après l'équation d'état de Clausius :

$$PV - nbP = nRT \iff PV = nbP + nRT$$

La relation entre  $PV$  et  $P$  est affine, de coefficient directeur  $nb$  et d'ordonnée à l'origine  $nRT$ . Si l'on suppose que  $b$  ne dépend pas de la température (ce qui semble une hypothèse raisonnable pour le volume propre des particules), alors les isothermes du gaz de Clausius, sur un diagramme d'Amagat, auront cette allure :



Pour déterminer la valeur de  $b$ , il suffit de mesurer le coefficient directeur de ces isothermes.

2.d) Lorsque  $P \rightarrow 0$  (gaz de plus en plus dilué), on a  $PV \simeq nRT$ . On retrouve le comportement du gaz parfait dans la limite du gaz infiniment dilué.

### ★ Exercice 7 : Dissociation du brome

1. On applique la loi des gaz parfait au dibrome gazeux :

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{mRT}{PM(\text{Br}_2)} = 0,45 \text{ L}$$

## TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

Il faut faire attention à la masse molaire du dibrome :  $M(\text{Br}_2) = 2M(\text{Br}) = 160 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Attention également à son unité. Pour obtenir le volume en unité SI ( $\text{m}^3$ ) il faut exprimer la masse molaire en  $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

2. Si l'on néglige la dissociation, il n'y a qu'à appliquer à nouveau la loi des gaz parfaits :  $V = 0,97L$ .

3. Si une molécule de dibrome se dissocie en deux atomes de brome, cela fait mécaniquement augmenter la quantité de matière totale en gaz. Dressons le tableau d'avancement molaire de la réaction, en notant  $n_0 = \frac{m}{M}$  la quantité de matière initiale en dibrome et  $\xi$  l'avancement molaire à l'équilibre.

	$\text{Br}_2$	$\longrightarrow$	$2\text{Br}$
État initial	$n_0$		0
État final	$n_0 - \xi$		$2\xi$

Le coefficient de dissociation est défini par  $x = \frac{\xi}{n_0}$ .

La quantité de matière totale en gaz, à l'équilibre, vaut  $n_g = n_0 - \xi + 2\xi = n_0 + \xi = n_0(1+x)$ . D'après la loi des gaz parfaits, le volume  $V'$  réellement mesuré vaut :

$$V' = \frac{n_0(1+x)RT}{P} = V(1+x) \iff x = \frac{V'}{V} - 1 = 0,23$$

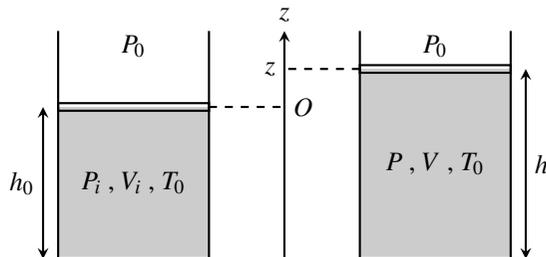
Il y a 23% des molécules de dibrome qui se sont dissociées.

### ★ Exercice 8 : Oscillations d'un piston

1. L'équilibre mécanique du piston impose que la pression interne vaut  $P_i = P_0 + \frac{mg}{S}$ . D'après la loi des gaz parfaits :

$$V_i = \frac{nRT_0}{P} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{mg}{S}} \iff h_0 = \frac{V_i}{S} = \frac{nRT_0}{P_0S + mg}$$

2. Pour étudier le mouvement du piston, on repère sa position avec un axe ( $Oz$ ) ascendant dont l'origine est prise au niveau de la position d'équilibre (voir schéma ci-dessous) :



Le piston est soumis à son poids et aux forces de pression exercées par le gaz interne et l'atmosphère extérieure (tout frottement est négligé). On applique le PFD au piston dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur  $\vec{u}_z$  :

$$m\ddot{z} = -mg + PS - P_0S$$

On va maintenant déterminer la relation entre la pression  $P$  dans le cylindre et l'altitude  $z$  du piston. On suppose qu'à tout instant, le gaz interne est en équilibre thermodynamique, à la température  $T_0$ . Puisque la température et la quantité de matière se conservent au cours du mouvement (le cylindre est fermé), alors d'après la loi des gaz parfaits :

$$PV = \text{Cste} \iff PV = P_iV_i = nRT_0$$

$$\iff P = \frac{nRT_0}{V} = \frac{nRT_0}{hS} = \frac{nRT_0}{(h_0+z)S} = \frac{nRT_0}{h_0S \left(1 + \frac{z}{h_0}\right)} = \frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{1 + \frac{z}{h_0}}$$

Pour simplifier cette expression mathématique, on effectue un développement limité de  $\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^{-1}$  au premier ordre. Puisqu'on étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre, on peut faire l'hypothèse qu'à tout instant,  $|z| \ll h_0$ , ce qui permet d'écrire :

$$\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{z}{h_0} \iff P \simeq \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) \left(1 - \frac{z}{h_0}\right)$$

On réinjecte cette expression dans le PFD :

$$m\ddot{z} = -mg + \left(P_0S + mg\right) \left(1 - \frac{z}{h_0}\right) - P_0S = -\left(P_0S + mg\right) \frac{z}{h_0}$$

On réécrit cette équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{P_0S + mg}{mh_0} z = 0$$

On vient de montrer que les petites oscillations du piston autour de sa position d'équilibre sont **harmoniques**, avec une période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mh_0}{P_0S + mg}}$$