Devoir n°25 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soient $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(a, b, a + b, a - b) \,|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et déterminer une base et la dimension de chacun d'eux. Sont-ils supplémentaires ?

2) Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

EXERCICE 2

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs dimensions.

1) L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ dont 1 et 2 sont racines.

2) L'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto a\,|x| + b\,|x - 1| + c\,|x - 2|$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3) L'ensemble des suites géométriques de raison 3.

4) L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note F (respectivement G) l'ensemble des éléments de E dont la somme des coefficients de chaque ligne (respectivement de chaque colonne) est nulle. On note H l'ensemble des éléments de E dont la somme des coefficients est nulle. Enfin $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices diagonales, symétriques et antisymétriques de E.

1) Montrer que F, G, H, $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base et la dimension de chacun d'eux.

On écrira chacun de ces ensembles comme un Vect, inutile de vérifier la stabilité par les opérations.

2) Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E.

3) a) Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

b) Montrer que $F + G = H$.

4) a) Montrer que F et $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

b) Décomposer la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ en somme d'un élément de F et d'une matrice diagonale.

5) a) Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et de $F \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

b) $F \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $F \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont-ils supplémentaires dans F ?