

Exercice : Étude d'une pompe à vide à piston

1. Lorsque le piston est en NN' les pressions sont égales dans l'enceinte et le corps de pompe (CR ouvert). Lorsque l'on repousse le piston vers LL' :

- Le clapet CR se ferme immédiatement car la pression dans le corps de pompe devient supérieure à celle dans l'enceinte. Cela signifie que la pression dans l'enceinte ne varie pas pendant cette phase, donc que la pression P_1 est celle dans l'enceinte et le corps de pompe lorsque le piston est en NN'.
- Le clapet CP ne s'ouvre pas immédiatement car la pression dans le corps de pompe doit atteindre P_0 . Nous allons démontrer que cela va forcément arriver.

Notons $n_{r,0}$ la quantité d'air dans le raccord de volume v_m avant un coup de pompe (piston en LL' et pression P_0 dans le raccord) et $n_{r,1}$ celle dans le corps de pompe lorsque le piston est en NN'. Pendant la première phase où l'on tire le piston, l'air de l'enceinte entre dans le corps de pompe, tandis que CP est fermé, donc on a forcément $n_{r,1} \geq n_{r,0}$. Raisonnons ensuite par l'absurde : si le clapet CP restait fermé jusqu'à ce que le piston revienne en LL' alors la pression serait forcément supérieure à P_0 car il y aurait davantage d'air dans le raccord qu'au départ, alors même que la pression valait P_0 avant le coup de pompe. On conclut que le clapet CP s'ouvre forcément avant que le piston revienne en LL'.

On calcule maintenant la pression P_1 dans l'enceinte et le corps de pompe lorsque le piston est en NN'. Le clapet CP restant fermé pendant que l'on tire le piston de LL' vers NN', la quantité d'air totale dans l'enceinte et le corps de pompe reste constante pendant cette phase. On traduit en équation la conservation de la quantité de matière dans l'enceinte et le corps de pompe. On note T_0 la température de l'air.

$$\frac{P_0 V}{RT_0} + \frac{P_0 v_m}{RT_0} = \frac{P_1 V}{RT_0} + \frac{P_1 V_M}{RT_0} \iff P_1 = \frac{V + v_m}{V + V_M} P_0$$

2. Après le N -ième coup de pompe (piston revenu en LL'), la pression dans l'enceinte vaut P_N et la pression dans le raccord vaut P_0 (justifié à la question précédente). Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente on peut montrer que, pendant la phase LL' $\rightarrow$ NN', le clapet CR s'ouvre forcément. Ainsi la pression P_{N+1} est égale dans l'enceinte et le corps de pompe lorsque le piston est en NN'. On la calcule en écrivant la conservation de la quantité de matière dans l'enceinte et le corps de pompe pendant la phase LL' $\rightarrow$ NN' (CP reste fermé pendant cette phase) :

$$\frac{P_N V}{RT_0} + \frac{P_0 v_m}{RT_0} = \frac{P_{N+1} V}{RT_0} + \frac{P_{N+1} V_M}{RT_0} \iff P_{N+1} = \frac{V}{V + V_M} P_N + \frac{v_m}{V + V_M} P_0$$

Le fonctionnement de cette pompe fait que la pression ne peut que décroître dans l'enceinte, or elle doit nécessairement être positive. Il existe donc forcément une valeur asymptotique P_L , qui est minimale, et qui correspond à un point fixe :

$$P_L = \frac{V}{V + V_M} P_L + \frac{v_m}{V + V_M} P_0 \iff P_L = \frac{v_m}{V_M} P_0$$

3. À partir de l'expression de P_N fournie on trouve que $\frac{P_N - P_L}{P_0 - P_L} = b^N$, avec $b = \frac{V}{V + V_M} = \frac{20}{21}$. Il reste alors à résoudre :

$$b^N = 10^{-3} \iff \log(b^N) = \frac{N \ln b}{\ln 10} = -3 \iff N = -\frac{3 \ln 10}{\ln b} = 142$$

Il faut donner 142 coups de pompe pour que le rapport atteigne 10^{-3} .

Exercice : Étude d'une pompe à vide à piston

1. Lorsque le piston est en NN' les pressions sont égales dans l'enceinte et le corps de pompe (CR ouvert). Lorsque l'on repousse le piston vers LL' :

- Le clapet CR se ferme immédiatement car la pression dans le corps de pompe devient supérieure à celle dans l'enceinte. Cela signifie que la pression dans l'enceinte ne varie pas pendant cette phase, donc que la pression P_1 est celle dans l'enceinte et le corps de pompe lorsque le piston est en NN'.
- Le clapet CP ne s'ouvre pas immédiatement car la pression dans le corps de pompe doit atteindre P_0 . Nous allons démontrer que cela va forcément arriver.

Notons $n_{r,0}$ la quantité d'air dans le raccord de volume v_m avant un coup de pompe (piston en LL' et pression P_0 dans le raccord) et $n_{r,1}$ celle dans le corps de pompe lorsque le piston est en NN'. Pendant la première phase où l'on tire le piston, l'air de l'enceinte entre dans le corps de pompe, tandis que CP est fermé, donc on a forcément $n_{r,1} \geq n_{r,0}$. Raisonnons ensuite par l'absurde : si le clapet CP restait fermé jusqu'à ce que le piston revienne en LL' alors la pression serait forcément supérieure à P_0 car il y aurait davantage d'air dans le raccord qu'au départ, alors même que la pression valait P_0 avant le coup de pompe. On conclut que le clapet CP s'ouvre forcément avant que le piston revienne en LL'.

On calcule maintenant la pression P_1 dans l'enceinte et le corps de pompe lorsque le piston est en NN'. Le clapet CP restant fermé pendant que l'on tire le piston de LL' vers NN', la quantité d'air totale dans l'enceinte et le corps de pompe reste constante pendant cette phase. On traduit en équation la conservation de la quantité de matière dans l'enceinte et le corps de pompe. On note T_0 la température de l'air.

$$\frac{P_0 V}{RT_0} + \frac{P_0 v_m}{RT_0} = \frac{P_1 V}{RT_0} + \frac{P_1 V_M}{RT_0} \iff P_1 = \frac{V + v_m}{V + V_M} P_0$$

2. Après le N -ième coup de pompe (piston revenu en LL'), la pression dans l'enceinte vaut P_N et la pression dans le raccord vaut P_0 (justifié à la question précédente). Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente on peut montrer que, pendant la phase LL' $\rightarrow$ NN', le clapet CR s'ouvre forcément. Ainsi la pression P_{N+1} est égale dans l'enceinte et le corps de pompe lorsque le piston est en NN'. On la calcule en écrivant la conservation de la quantité de matière dans l'enceinte et le corps de pompe pendant la phase LL' $\rightarrow$ NN' (CP reste fermé pendant cette phase) :

$$\frac{P_N V}{RT_0} + \frac{P_0 v_m}{RT_0} = \frac{P_{N+1} V}{RT_0} + \frac{P_{N+1} V_M}{RT_0} \iff P_{N+1} = \frac{V}{V + V_M} P_N + \frac{v_m}{V + V_M} P_0$$

Le fonctionnement de cette pompe fait que la pression ne peut que décroître dans l'enceinte, or elle doit nécessairement être positive. Il existe donc forcément une valeur asymptotique P_L , qui est minimale, et qui correspond à un point fixe :

$$P_L = \frac{V}{V + V_M} P_L + \frac{v_m}{V + V_M} P_0 \iff P_L = \frac{v_m}{V_M} P_0$$

3. À partir de l'expression de P_N fournie on trouve que $\frac{P_N - P_L}{P_0 - P_L} = b^N$, avec $b = \frac{V}{V + V_M} = \frac{20}{21}$. Il reste alors à résoudre :

$$b^N = 10^{-3} \iff \log(b^N) = \frac{N \ln b}{\ln 10} = -3 \iff N = -\frac{3 \ln 10}{\ln b} = 142$$

Il faut donner 142 coups de pompe pour que le rapport atteigne 10^{-3} .