Chapitre 16

APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Applications linéaires

1 Définition

Définition 1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est* **linéaire** *si :*

(i) $\forall\, x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ *(compatibilité avec l'addition),*

(ii) $\forall\, \alpha \in K, \forall\, x \in E,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$ *(compatibilité avec la multiplication par un scalaire).*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 1 *f est linéaire si et seulement si :*

$$\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, x, y \in E,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Si f est linéaire, alors pour tous $\alpha, \beta \in K$ et pour tous $x, y \in E$ on a $f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

($\Leftarrow$) Il suffit de prendre $\alpha = \beta = 1$ pour le (i) et $\beta = 0$ pour le (ii). $\square$

Par récurrence immédiate on en déduit que f est linéaire si et seulement si :

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K, \forall\, x_1, \ldots, x_n \in E, f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Proposition 2 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$.*

Démonstration : $f(0_E) = f(0_E - 0_E) = f(0_E) - f(0_E) = 0_F$. $\square$

Définition 2 *Soit E un K-espace vectoriel. Un* **endomorphisme de** *E est une application linéaire de E dans E. Une* **forme linéaire sur** *E est une application linéaire de E dans K.*

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E (donc $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$) et E^* l'ensemble des formes linéaires sur E (donc $E^* = \mathcal{L}(E, K)$).

2 Exemples

Exemple 1 : Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x - y, 2x + 5y)$.

Soient (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f((x,y) + (x', y')) & = & f(x + x', y + y') \\ & = & (3(x + x') - (y + y'), 2(x + x') + 5(y + y')) \\ & = & (3x - y + 3x' - y', 2x + 5y + 2x' + 5y') \\ & = & (3x - y, 2x + 5y) + (3x' - y', 2x' + 5y') \\ & = & f(x, y) + f(x', y'). \end{array}$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha(x, y)) & = & f(\alpha x, \alpha y) \\ & = & (3\alpha x - \alpha y, 2\alpha x + 5\alpha y) \\ & = & \alpha(3x - y, 2x + 5y) \\ & = & \alpha f(x, y). \end{array}$$

f est donc une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 : Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2, y^2)$.

Soient (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f((x,y)+(x',y')) &= f(x+x', y+y') \\ &= ((x+x')^2, (y+y')^2) \\ &= (x^2+x'^2+2xx', y^2+y'^2+2yy'), \end{aligned}$$

alors que :

$$\begin{aligned} f(x,y)+f(x',y') &= (x^2, y^2)+(x'^2, y'^2) \\ &= (x^2+x'^2, y^2+y'^2). \end{aligned}$$

On n'a donc pas, en général, $f((x, y) + (x', y')) = f(x, y) + f(x', y')$. L'application f n'est donc pas linéaire.

Exemple 3 : Soit l'application $D : K[X] \to K[X]$ définie par $D(P) = P'$.

Alors pour tous $P, Q \in K[X]$ on a :

$$D(P+Q) = (P+Q)' = P'+Q' = D(P)+D(Q),$$

et pour tout $\alpha \in K$ et pour tout $P \in K[X]$ on a :

$$D(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha D(P).$$

D est donc une application linéaire (c'est un endomorphisme de $K[X]$).

Exemple 4 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes. Considérons l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f((u_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Alors :

$$f((u_n)+(v_n)) = \lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = f((u_n))+f((v_n)).$$

Soit (u_n) une suite réelle convergente et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\alpha(u_n)) = \lim_{n\to+\infty}(\alpha u_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha f((u_n)).$$

f est donc une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (c'est une forme linéaire sur E).

Exemple 5 : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$. Considérons l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Soient $f, g \in E$. Alors :

$$\varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = \varphi(f)+\varphi(g).$$

Soient $f \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\varphi(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt = \alpha\varphi(f).$$

φ est donc une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (c'est une forme linéaire sur E).

Exemple 6 : Soit E un K-espace vectoriel. L'application nulle et l'application identité Id_E sont évidemment linéaires. Plus généralement :

Définition 3 *Soit $k \in K$.* **L'homothétie vectorielle de rapport** k *est l'application $k\,\mathrm{Id}_E : x \mapsto kx$.*

C'est un endomorphisme de E : pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\alpha \in K$, on a :

$$(k\,\mathrm{Id}_E)(x+y) = k(x+y) = kx+ky = (k\,\mathrm{Id}_E)(x)+(k\,\mathrm{Id}_E)(y)$$

et :

$$(k\,\mathrm{Id}_E)(\alpha x) = k(\alpha x) = \alpha(kx) = \alpha(k\,\mathrm{Id}_E)(x).$$

3 Image et noyau d'une application linéaire

• IMAGE

Proposition 3 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Autrement dit, l'image d'un sous-espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F (on rappelle que $f(E_1)$ est l'ensemble des images par f des éléments de E_1 : $f(E_1) = \{f(x) \,|\, x \in E_1\}$).

Démonstration :

$0_E \in E_1$ donc $f(0_E) = 0_F \in f(E_1)$ qui n'est donc pas vide.

Soient $y_1, y_2 \in f(E_1)$. Il existe donc $x_1, x_2 \in E_1$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Or E_1 est un sous-espace vectoriel de E donc $x_1 + x_2 \in E_1$, et f est linéaire donc $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(E_1)$.

Soient $y \in f(E_1)$ et $\alpha \in K$. Il existe donc $x \in E_1$ tel que $y = f(x)$. Or E_1 est un sous-espace vectoriel de E donc $\alpha x \in E_1$, et f est linéaire donc $\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in f(E_1)$. □

Définition 4 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.* **L'image de** f *est l'ensemble des images par f des éléments de E. On la note* $\operatorname{Im} f$.

Autrement dit :

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \,|\, x \in E\}.$$

Proposition 4 $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration : Proposition précédente avec $E_1 = E$. □

Proposition 5 *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration :

f est surjective si tout élément de F admet (au moins) un antécédent par f, c'est-à-dire si tout élément de F appartient à $\operatorname{Im} f$. □

• NOYAU

Proposition 6 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si F_1 est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Autrement dit, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de E (on rappelle que $f^{-1}(F_1) = \{x \in E \,|\, f(x) \in F_1\}$: c'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de F_1).

Démonstration :

$0_F \in F_1$ et $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$ qui n'est donc pas vide.

Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$. On a donc $f(x_1)$ et $f(x_2) \in F_1$. Alors $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in F_1$ (car F_1 est un sous-espace vectoriel de F), donc $x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1)$.

Soient $\alpha \in K$ et $x \in f^{-1}(F_1)$. On a donc $f(x) \in F_1$. Alors $f(\alpha x) = \alpha f(x) \in F_1$ (car F_1 est un sous-espace vectoriel de F), donc $\alpha x \in f^{-1}(F_1)$. □

Définition 5 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le* **noyau de** f *est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est le vecteur nul. On le note* $\operatorname{Ker} f$.

Autrement dit :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\}.$$

Proposition 7 $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration : $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\})$ et $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Proposition 8 *f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que f est injective et montrons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_F$. Or f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$ également. Ainsi $f(x) = f(0_E)$, et donc $x = 0_E$ puisque f est injective. On a donc bien $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors, puisque f est linéaire, $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0_F$, donc $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, donc $x_1 - x_2 = 0_E$, et donc $x_1 = x_2$. Ainsi f est injective. □

Exercice 1 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (3x+y-z, x+2y+z)$. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2 On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2XP - X^2P'$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer son noyau et son image.

4 Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 9 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et soit $\alpha \in K$. Alors $f + g$ et αf sont des applications linéaires.*

$\mathcal{L}(E, F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, F), +, .)$.

Démonstration :

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in K$.

Alors $(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$, et $(f + g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda(f + g)(x)$: l'application $f + g$ est linéaire.

De même $(\alpha f)(x + y) = \alpha f(x + y) = \alpha(f(x) + f(y)) = \alpha f(x) + \alpha f(y) = (\alpha f)(x) + (\alpha f)(y)$, et $(\alpha f)(\lambda x) = \alpha f(\lambda x) = \alpha\lambda f(x) = \lambda(\alpha f)(x)$: l'application αf est linéaire. □

5 Composition d'applications linéaires

Proposition 10 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.*

Démonstration :

Soient $x, y \in E$ et $\alpha \in K$. Alors $(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$, et $(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f)(x)$: l'application $g \circ f$ est linéaire. □

Proposition 11 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels. Soient $f, f_1, f_2 : E \to F$, $g, g_1, g_2 : F \to G$ des applications linéaires. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Alors :*

$$g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1(g \circ f_1) + \alpha_2(g \circ f_2),$$

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \circ f = \alpha_1(g_1 \circ f) + \alpha_2(g_2 \circ f).$$

On dit que la composition est **bilinéaire**.

Démonstration :

Soit $x \in E$. Alors, par linéarité de g, $(g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2))(x) = g((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)) = g(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) = \alpha_1 g(f_1(x)) + \alpha_2 g(f_2(x)) = (\alpha_1(g \circ f_1) + \alpha_2(g \circ f_2))(x)$, et $((\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \circ f)(x) = (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)(f(x)) = \alpha_1 g_1(f(x)) + \alpha_2 g_2(f(x)) = (\alpha_1(g_1 \circ f) + \alpha_2(g_2 \circ f))(x)$. □

Remarque : Soit f un endomorphisme de E. On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f^{n+1} = f^n \circ f$ (définition récursive). Autrement dit : $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois).

6 Isomorphismes, automorphismes

Proposition 12 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire également.*

Démonstration :

Soient $y_1, y_2 \in F$. On a $f(f^{-1}(y_1 + y_2)) = y_1 + y_2 = f(f^{-1}(y_1)) + f(f^{-1}(y_2)) = f(f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2))$. Or f est bijective, donc $f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$.

Soient $\alpha \in K$ et $y \in F$. On a $f(f^{-1}(\alpha y)) = \alpha y = \alpha f(f^{-1}(y)) = f(\alpha f^{-1}(y))$. Or f est bijective, donc $f^{-1}(\alpha y) = \alpha f^{-1}(y)$. □

Définition 6 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Un* **isomorphisme** *de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.*

D'après la proposition 12, si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Définition 7 *Soit E un K-espace vectoriel. Un* **automorphisme de** *E est un isomorphisme de E dans E.*

Autrement dit, c'est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est appelé **groupe linéaire de** E et noté $GL(E)$. Il est stable par composition et par passage à la réciproque. Si $f \in GL(E)$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

7 Applications linéaires et sous-espaces supplémentaires

Proposition 13 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. Soient $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.*

Autrement dit, une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Démonstration :

Analyse : supposons que f existe. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1+x_2$. Alors $f(x) = f(x_1)+f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Ainsi, si f existe, elle est unique.

Synthèse : soit f définie par la formule ci-dessus. Montrons que f est linéaire. Soient $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, avec $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$, et soient $\alpha, \beta \in K$. Alors $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$ donc $f(\alpha x + \beta y) = f_1(\alpha x_1 + \beta y_1) + f_2(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha f_1(x_1) + \beta f_1(y_1) + \alpha f_2(x_2) + \beta f_2(y_2) = \alpha(f_1(x_1) + f_2(x_2)) + \beta(f_1(y_1) + f_2(y_2)) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. De plus on a clairement $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$. $\square$

Corollaire 14 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Si $f_{|E_1} = g_{|E_1}$ et $f_{|E_2} = g_{|E_2}$, alors $f = g$.*

II Applications linéaires en dimension finie

1 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Proposition 15

(i) L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.

(ii) L'image d'une famille libre par une application linéaire injective *est une famille libre.*

Démonstration :

(i) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille liée. Il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Alors $f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n) = f(0)$, soit, puisque f est linéaire, $\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = 0$: la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est liée.

(ii) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre. Montrons que si f est injective, alors la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre également. Supposons qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = 0$. Par linéarité de f on a donc $f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n) = 0$, donc $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \in \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ puisque $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre. $\square$

Proposition 16 *L'image d'une famille génératrice de E par une application linéaire de E dans F est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} f$.

Démonstration :

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. On a donc $y = f(x) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$. $\square$

Exercice 3 Retrouver à l'aide de cette proposition les images des applications linéaires des exercices 1 et 2.

Proposition 17 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels, avec E de dimension finie non nulle. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

(i) f est injective si et seulement si la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.

(ii) f est surjective si et seulement si la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F.

(iii) f est bijective si et seulement si la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Pour montrer qu'une application linéaire est bijective il suffit donc de montrer qu'elle envoie une base de E sur une base de F.

Démonstration :

(i) Le sens direct est une conséquence immédiate de la proposition 15. Pour le sens réciproque, supposons que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre et montrons qu'alors f est injective. Soit $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) = 0$. Or la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre, donc $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est injective.

(ii) Le sens direct est une conséquence immédiate de la proposition 16. Pour le sens réciproque, supposons que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F et montrons qu'alors f est surjective. Soit $y \in F$. Puisque $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice, il existe $y_1, \ldots, y_n \in K$ tels que $y = y_1 f(e_1) + \ldots + y_n f(e_n)$, soit $y = y_1 f(e_1) + \ldots + y_n f(e_n) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \in \operatorname{Im} f$. f est bien surjective.

(iii) se déduit de (i) et (ii). $\square$

Corollaire 18 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

Ainsi pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de même dimension *finie* est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective ou qu'elle est surjective. En général l'injectivité est plus simple à établir.

Démonstration :

Soit $n = \dim E$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Considérons la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. Son cardinal est égal à $\dim F$, donc il y a équivalence entre le fait qu'elle soit libre, qu'elle soit génératrice de F et qu'elle soit une base de F. Par conséquent, d'après la proposition 17, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f sont équivalentes. $\square$

Corollaire 19 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. Alors :*

$$f \text{ injectif } \Leftrightarrow f \text{ surjectif } \Leftrightarrow f \text{ bijectif.}$$

Attention, ces résultats sont faux en dimension infinie :

Exercice 4 Montrer que l'application $D : K[X] \to K[X]$ définie par $D(P) = P'$ est un endomorphisme de $K[X]$ surjectif mais non injectif. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $K[X]$?

2 Application linéaire définie par l'image d'une base

Proposition 20 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels, avec E de dimension finie non nulle. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Démonstration :

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : supposons qu'une telle application f existe. Soit $x \in E$. $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ (uniques) tels que $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Puisque f est linéaire on a alors $f(x) = f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = x_1f_1 + \ldots + x_nf_n$. Ainsi si f existe elle est définie par cette formule (donc elle est unique).

Synthèse : soit l'application $f : E \to F$ qui au vecteur $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ associe le vecteur $f(x) = x_1f_1 + \ldots + x_nf_n$.

Alors f est linéaire : si $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ alors $x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \ldots + (x_n + y_n)e_n$ donc $f(x+y) = (x_1 + y_1)f_1 + \ldots + (x_n + y_n)f_n = f(x) + f(y)$, et si $\alpha \in K$ on a $\alpha x = (\alpha x_1)e_1 + \ldots + (\alpha x_n)e_n$ donc $f(\alpha x) = (\alpha x_1)f_1 + \ldots + (\alpha x_n)f_n = \alpha f(x)$.

De plus on a bien $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

Exemples :

– Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 0) = (2, 3)$ et $f(0, 1) = (-1, 4)$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = x(2, 3) + y(-1, 4) = (2x - y, 3x + 4y)$.

– Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ telle que $f(1) = X+1$, $f(X) = 0$ et $f(X^2) = X-1$: pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $f(P) = af(X^2) + bf(X) + cf(1) = a(X-1) + b.0 + c(X+1) = (a+c)X + (c-a)$.

Corollaire 21 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels, avec E de dimension finie non nulle. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Si $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $f = g$.*

Pour montrer que deux applications linéaires sont égales il suffit donc de montrer qu'elles prennent les mêmes valeurs sur une base.

3 Espaces isomorphes

Définition 8 *Deux K-espaces vectoriels E et F sont* **isomorphes** *s'il existe un isomorphisme de E dans F.*

Par exemple, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes : l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(a, b, c) = a + bX + cX^2$ est un isomorphisme (elle envoie la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sur celle de $\mathbb{R}_2[X]$).

Proposition 22 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : E \to F$. Soit $n = \dim E$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F, donc $\dim F = n$ également.

($\Leftarrow$) Supposons que $\dim E = \dim F$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Alors l'application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ est un isomorphisme. $\square$

En particulier, tout K-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n.

4 Rang d'une application linéaire

Définition 9 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. On dit que f est* **de rang fini** *si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. On appelle alors* **rang de** *f, et on note $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de l'image de f :*

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Lemme 23 (théorème du rang, forme géométrique) *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit E_1 un sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors f induit un isomorphisme de E_1 sur $\operatorname{Im} f$.*

Cela signifie que l'application $\tilde{f} : E_1 \to \operatorname{Im} f$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est un isomorphisme.

Démonstration :

Montrons que $\tilde{f}$ est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} \tilde{f}$: on a donc $f(x) = 0$, d'où $x \in \operatorname{Ker} f$. Or $E_1 \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \tilde{f} = \{0\}$ et donc $\tilde{f}$ est injective.

Montrons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $E = \operatorname{Ker} f \oplus E_1$, il existe $x' \in \operatorname{Ker} f$ et $x'' \in E_1$ tels que $x = x' + x''$. On a donc $y = f(x) = f(x') + f(x'') = f(x'') = \tilde{f}(x'')$ donc $y \in \operatorname{Im} \tilde{f}$. Ainsi $\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f$ et donc $\tilde{f}$ est surjective. $\square$

Théorème 24 (théorème du rang) *Soient E et F deux K-espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :*

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Ainsi f est de rang fini et :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f).$$

Démonstration :

On a vu qu'en dimension finie tout sous-espace admet un supplémentaire. Soit donc E_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim E_1$. Or, d'après le lemme, E_1 est isomorphe à $\operatorname{Im} f$, donc $\dim E_1 = \dim(\operatorname{Im} f)$ et le théorème s'ensuit. $\square$

Proposition 25 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$, et :*

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E, \\ f \text{ surjective} &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim F, \\ f \text{ bijective} &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E = \dim F. \end{aligned}$$

Démonstration :

On a d'une part $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim F$ puisque $\operatorname{Im} f \subset F$, et d'autre part $\operatorname{rg}(f) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant \dim E$, donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, ce qui revient à dire que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, ou encore par le théorème du rang, que $\operatorname{rg}(f) = \dim E$.
f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$, ce qui est équivalent à $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$ puisque $\operatorname{Im} f \subset F$. $\square$

Proposition 26 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.*

Démonstration : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, donc $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)))$, soit $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. $\square$

Pour calculer le rang d'une application linéaire on peut ainsi se ramener au calcul du rang d'une famille de vecteurs.

Proposition 27 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. Si f et g sont de rang fini, alors $g \circ f$ aussi, et :*

(i) $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

(ii) Si f est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

(iii) Si g est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Démonstration :

On a clairement $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ donc $g \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$. De plus, si f est bijective, alors $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$ (si $z = g(y) \in \operatorname{Im} g$ alors $z = g(f(f^{-1}(y))))$, donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

Par ailleurs, si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, alors $(g(f_1), \ldots, g(f_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(g \circ f)$: si $z = g(f(x)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $f(x) = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ et donc $z = \alpha_1 g(f_1) + \ldots + \alpha_n g(f_n)$. On en déduit que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$. De plus, si g est bijective, alors $(g(f_1), \ldots, g(f_n))$ est libre, donc c'est une base de $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et par suite $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$. $\square$

5 Application : suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 10 *Une* **suite récurrente linéaire d'ordre 2** *est une suite réelle ou complexe* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaisant à une relation de récurrence de la forme*

$$(*)\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$.

On appelle **équation caractéristique** *associée à* (u_n) *l'équation (d'inconnue* $r \in \mathbb{C}$*) :*

$$(e) : ar^2 + br + c = 0.$$

Proposition 28 *(Cas complexe) Soit* Δ *le discriminant de* (e).

Si $\Delta \neq 0$*, les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

où r_1 *et* r_2 *sont les racines de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Si $\Delta = 0$*, les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n,$$

où r_0 *est la racine double de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit F l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation $(*)$. Il est clair que c'est un sous-espace vectoriel de E.

Considérons l'application $\varphi : F \to \mathbb{C}^2$ définie par $\varphi((u_n)) = (u_0, u_1)$. C'est clairement une application linéaire, et elle est bijective car quels que soient $a, b \in \mathbb{C}$, il existe une unique suite (u_n) vérifiant $(*)$ et telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2. Pour déterminer F, il suffit donc d'en trouver une base, i.e. une famille libre de cardinal 2.

On va chercher les suites géométriques de F. Posons $u_n = r^n$ où $r \in \mathbb{C}^*$. Alors la suite (u_n) appartient à F si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n$, soit $ar^2 + br + c = 0$. Ainsi, (u_n) est dans F si et seulement si r est solution de (e).

Si $\Delta \neq 0$, alors (e) a deux solutions distinctes r_1 et r_2, donc les suites (r_1^n) et (r_2^n) sont dans F. Or elles forment une famille libre, donc une base de F, et on en déduit que les éléments de F sont de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Si $\Delta = 0$, alors (e) a une solution double r_0, donc la suite (r_0^n) est dans F. De plus, la suite (nr_0^n) est aussi dans F : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a(n+2)r_0^{n+2} + b(n+1)r_0^{n+1} + cnr_0^n = nr_0^n(ar_0^2 + br_0 + c) + r_0^{n+1}(2ar_0 + b) = 0$. Or ces deux suites forment une famille libre, donc une base de F, et le résultat s'ensuit. □

Proposition 29 *(Cas réel) Soit* Δ *le discriminant de* (e).

Si $\Delta > 0$*, les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

où r_1 *et* r_2 *sont les racines de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$*, les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n,$$

où r_0 *est la racine double de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta < 0$*, les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta),$$

où $\rho e^{i\theta}$ *et* $\rho e^{-i\theta}$ *sont les racines de* (e) *(avec* $\rho > 0$*) et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Si $\Delta \geqslant 0$, les solutions sont les mêmes que dans le cas complexe en prenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta < 0$, les suites de terme général $\dfrac{r_1^n + r_2^n}{2} = \rho^n \cos(n\theta)$ et $\dfrac{r_1^n - r_2^n}{2} = \rho^n \sin(n\theta)$ sont dans F. Or elles forment une famille libre, donc une base de F. Le résultat s'ensuit. □

6 Équations linéaires

Définition 11 *Une* **équation linéaire** *est une équation de la forme* $u(x) = b$ *où* u *est une application linéaire d'un* K*-espace vectoriel* E *dans un* K*-espace vectoriel* F*,* b *est un élément de* F *(appelé* **second membre** *de l'équation) et l'inconnue* x *est dans* E.

Par exemple, le système linéaire (Σ) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ est une équation linéaire : on peut l'écrire sous la forme $u(x) = b$ où $u : K^p \to K^n$ est définie par $u(x_1, \ldots, x_p) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p, \ldots, a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

Les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre étudiées au chapitre 5 sont également des équations linéaires. L'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (avec a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I) est de la forme $u(y) = c$ où $u : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ est définie par $u(y) = ay' + by$. L'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ (avec $a, b, c \in K$ et f continue sur I) est de la forme $u(y) = f$ où $u : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ est définie par $u(y) = ay'' + by' + cy$.

Proposition 30

(i) L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $u(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) L'ensemble des solutions de l'équation linéaire avec second membre $u(x) = b$ est soit vide, soit $\{x_1 + h \mid h \in \operatorname{Ker} u\}$ où x_1 est une solution de l'équation.

Démonstration :

L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = 0$ est le noyau de u : c'est un sous-espace vectoriel de E. Si $b \neq 0$ et que x_1 une solution de l'équation, alors : $u(x) = b \Leftrightarrow u(x) = u(x_1) \Leftrightarrow u(x - x_1) = 0 \Leftrightarrow x - x_1 \in \operatorname{Ker} u$. □

7 Hyperplans et formes linéaires

Dans ce paragraphe E désigne un K-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$.

Rappels : Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans K.

Proposition 31 *Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E.*

Démonstration :

Soit $\varphi : E \to K$ une forme linéaire non nulle. Par le théorème du rang on a $\dim(\operatorname{Ker} \varphi) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} \varphi)$. Or $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de K, donc $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 0$ ou 1. Puisque φ est non nulle, $\operatorname{Im} \varphi$ n'est pas réduite à $\{0\}$, donc $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 1$. Par conséquent $\dim(\operatorname{Ker} \varphi) = \dim E - 1$: $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E. □

Réciproquement :

Proposition 32 *Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \to K$ telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.*

φ est unique à un coefficient multiplicatif près : si ψ est une autre forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker} \psi$, alors il existe $k \in K$ tel que $\psi = k\varphi$.

Démonstration :

Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base de E $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$. Soit $\varphi : E \to K$ l'unique application linéaire telle que $\varphi(e_i) = 0$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = 1$. Alors $\operatorname{Ker} \varphi = H$ puisque $x = x_1e_1 + \ldots + x_{n-1}e_{n-1} + x_ne_n \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0$.

Si ψ est une autre forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker} \psi$, alors on a aussi $\psi(e_i) = 0$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, donc $\psi = k\varphi$ où $k = \psi(e_n)$. □

Interprétation : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit φ une forme linéaire sur E. Posons $a_i = \varphi(e_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in E$. Alors $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, donc :

$$x \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Les propositions précédentes disent qu'une équation de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ définit un hyperplan de E et, réciproquement, que tout hyperplan de E a une équation de cette forme (unique à un coefficient multiplicatif près).

Par exemple, dans un espace de dimension 2, une droite vectorielle est définie par une équation de la forme $ax + by = 0$. Dans un espace de dimension 3, un plan vectoriel est défini par une équation de la forme $ax + by + cz = 0$.

Proposition 33 *Soit H un hyperplan de E et D une droite vectorielle non contenue dans H. Alors H et D sont supplémentaires.*

Démonstration : Soit $x \in H \cap D$. Si x est non nul, alors il engendre D qui est donc incluse dans H : contradiction. Ainsi $H \cap D = \{0\}$. De plus $\dim H + \dim D = \dim E$ donc $E = H \oplus D$. □

III Projecteurs et symétries

Remarque préliminaire : si f est un endomorphisme de E, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par f et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par f. En effet :

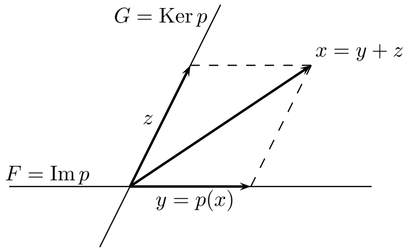
$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (f - \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E),$$

et :

$$f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow (f + \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E).$$

1 Projecteurs

Définition 12 *Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout vecteur x de E se décompose alors de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On appelle* **projection sur F parallèlement à** *G l'application $p : E \to E$ qui à tout x de E associe y.*



Proposition 34 *p est un endomorphisme de E, $\mathrm{Ker}\, p = G$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$. De plus on a $p^2 = p$.*

Attention : ici $p^2 = p \circ p$.

Démonstration :

Montrons que p est linéaire. Soient $x, x' \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$. Alors $p(x) = y$ et $p(x') = y'$. On a $\alpha x + \beta x' = \alpha y + \alpha z + \beta y' + \beta z' = (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z')$, donc $p(\alpha x + \beta x') = \alpha y + \beta y'$ puisque $\alpha y + \beta y' \in F$ et que $\alpha z + \beta z' \in G$. On a donc bien $p(\alpha x + \beta x') = \alpha p(x) + \beta p(x')$.

Déterminons le noyau de p. Soit $x = y + z \in E$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Alors $p(x) = y$, donc : $x \in \mathrm{Ker}\, p \Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x \in G$. Par conséquent $\mathrm{Ker}\, p = G$.

Déterminons les vecteurs invariants par p. Soit $x = y + z \in E$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Alors : $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow y = y + z \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x \in F$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$.

Déterminons l'image de p. Pour tout $x \in E$ on a $p(x) \in F$, donc $\mathrm{Im}\, p \subset F$. De plus, si $x \in F$, alors on a $p(x) = x$ et donc $x \in \mathrm{Im}\, p$. Par conséquent $\mathrm{Im}\, p = F$.

Enfin, pour tout $x \in E$, on a $(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x)$ car $p(x) \in F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. □

En fait on va montrer que la relation $p^2 = p$ caractérise les projections, c'est-à-dire que tout endomorphisme p de E qui vérifie cette relation est une projection.

Définition 13 *Soit E un K-espace vectoriel et soit p un endomorphisme de E. On dit que p est un* **projecteur** *si $p^2 = p$.*

Proposition 35 *Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont supplémentaires, et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.*

On voit donc que les termes « projection » et « projecteur » désignent en fait les mêmes objets.

Démonstration :

Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p$. Cela signifie, d'une part, que $p(x) = 0$ et, d'autre part, qu'il existe $u \in E$ tel que $x = p(u)$. Mais puisque $p^2 = p$ on peut écrire que $x = p(u) = p^2(u) = p(p(u)) = p(x) = 0$, donc $x = 0$.

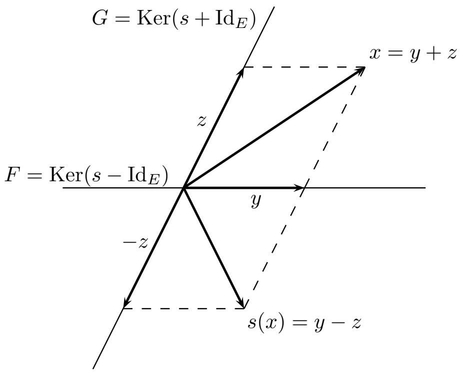
Montrons maintenant que $E = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, p$. Soit $x \in E$. Alors on peut écrire que $x = (x - p(x)) + p(x)$. Or $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$, et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p = \{0\}$ et $E = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, p$, donc $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont supplémentaires. De plus, la décomposition $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ et $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ montre bien que $p(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Im}\, p$. □

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (5x - 2y + 6z, 4x - y + 6z, -2x + y - 2z)$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

2 Symétries

Définition 14 *Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout vecteur x de E se décompose alors de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On appelle* **symétrie par rapport à F parallèlement à G** *l'application $s : E \to E$ qui à tout x de E associe $y - z$.*



Proposition 36 *s est un automorphisme de E, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = G$. De plus on a $s^2 = \mathrm{Id}_E$.*

Démonstration :

Notons p la projection sur F parallèlement à G. Alors pour tout $x = y + z$ ($y \in F$ et $z \in G$) on a $s(x) = y - z = 2y - (y + z) = 2p(x) - x$ donc on voit que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$. Or p et Id_E sont linéaires, donc s aussi.

Soit $x = y + z$ (avec $y \in F$ et $z \in G$). Alors $s^2(x) = s(s(x)) = s(y - z) = y + z = x$, donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Cela implique que s est bijective (et que $s^{-1} = s$). s est donc un automorphisme de E.

Enfin, si $x = y + z$ (avec $y \in F$ et $z \in G$), alors : $s(x) = x \Leftrightarrow y - z = y + z \Leftrightarrow 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x \in F$, et : $s(x) = -x \Leftrightarrow y - z = -y - z \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x \in G$. $\square$

De même que la relation $p^2 = p$ caractérise les projections, la relation $s^2 = \mathrm{Id}_E$ caractérise les symétries :

Proposition 37 *Soit s un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires, et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.*

Démonstration :

On va montrer par analyse-synthèse que tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Analyse : supposons que l'on ait effectivement cette décomposition. Alors $s(x) = s(y) + s(z) = y - z$ puisque $s(y) = y$ et $s(z) = -z$. On a donc $x + s(x) = 2y$, soit $y = \frac{1}{2}(x + s(x))$, et $x - s(x) = 2z$, soit $z = \frac{1}{2}(x - s(x))$. Si y et z existent, ils sont donc uniques.

Synthèse : soit $y = \frac{1}{2}(x + s(x))$ et $z = \frac{1}{2}(x - s(x))$. Vérifions que $x = y + z$, que $y \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et que $z \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

On a $y + z = \frac{1}{2}(x + s(x) + x - s(x)) = x$. De plus, $s(y) = s\left(\frac{1}{2}(x + s(x))\right) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = y$ (car $s^2 = \mathrm{Id}_E$) donc $y \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Enfin, $s(z) = s\left(\frac{1}{2}(x - s(x))\right) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -z$ donc $z \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

La décomposition cherchée est donc $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$, et on voit aussi que $s(x) = \frac{1}{2}(x + s(x)) - \frac{1}{2}(x - s(x))$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires, et que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. $\square$

Exercice 6 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, 4x + y + 4z, -4x - 2y - 5z)$. Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.