Correction du DNS 22

EXERCICE 1

Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=x\sqrt[3]{1+1/x}-x\sqrt[3]{1-1/x}=x(1+1/(3x)+o(1/x))-x(1-1/(3x)+o(1/x))=2/3+o(1)$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)=\frac{2}{3}.$$

EXERCICE 2

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$H_{n+1}-H_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}>0$$

donc la suite (H_n) est strictement croissante.

2) a) (i) La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in[k,k+1]$ on a $\frac{1}{k+1}\leqslant \ln'(x)\leqslant\frac{1}{k}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$\frac{1}{k+1}(k+1-k)\leqslant \ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}(k+1-k)$$

qui donne l'encadrement demandé.

a) (ii) Pour tout $t\in[k,k+1]$ on a $\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}$ donc

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{dt}{k}$$

qui donne également

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}.$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En sommant membre à membre l'encadrement précédent on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

qui donne par télescopage

$$H_{n+1}-1\leqslant\ln(n+1)\leqslant H_n.$$

L'inégalité de gauche donne $H_{n+1}\leqslant\ln(n+1)+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ donc on a $H_n\leqslant\ln n+1$ pour tout $n\geqslant 2$, et c'est vrai aussi pour $n=1$. Ainsi on a bien

$$\ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant\ln n+1$$

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=+\infty$ aussi, et au voisinage de $+\infty$ on a $\ln(n+1)\sim\ln n$ et $\ln n+1\sim\ln n$ donc $H_n\sim\ln n$ aussi par le théorème des gendarmes pour les équivalents.

3) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$u_{n+1}-u_n=H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln n=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)\leqslant 0$$

d'après l'inégalité établie en 2)a). La suite (H_n) est donc décroissante.

b) D'après 2)b) on a $u_n\geqslant\ln(n+1)-\ln n\geqslant 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0. De plus elle est décroissante, donc elle est convergente.

En passant à la limite dans l'encadrement $0\leqslant u_n\leqslant 1$ on obtient que sa limite est comprise entre 0 et 1.

EXERCICE 3

1) La fonction φ est dérivable sur $]0,1]$ (fonction rationnelle) et pour tout $x\in]0,1]$

$$\varphi'(t)=\frac{-3t^3-(1-t^3)}{t^2}=\frac{-1-2t^3}{t^2}<0.$$

La fonction est donc continue et strictement croissante sur $]0,1]$ et ses limites en 1 et 0 sont 0 et $+\infty$ respectivement. Par conséquent, elle définit une bijection de $]0,1]$ dans $\varphi(]0,1]) = \mathbb{R}^+$.

2) La fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ses limites en 0 et $+\infty$ sont 1 et 0 respectivement.

3) On a $\varphi(1/2) = \dfrac{7}{4} > 1$ et u est strictement décroissante donc $u(1) > 1/2$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $\varphi(u(x)) = x$ donc $\dfrac{1-u(x)^3}{u(x)} = x$ d'où $1 - u(x)^3 = xu(x)$ et donc

$$u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0.$$

5) a) La fonction φ est dérivable sur $]0,1]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0,1]$ donc, d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. En dérivant l'égalité de la question précédente on obtient

$$3u(x)^2u'(x) + u(x) + xu'(x) = 0$$

qui donne bien

$$u'(x) = -\frac{u(x)}{3u(x)^2 + x}$$

pour tout $x \geqslant 0$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $3u(x)^2 + x \geqslant 3u(x)^2$ donc

$$|u'(x)| = \frac{u(x)}{3u(x)^2 + x} \leqslant \frac{1}{3u(x)}.$$

6) La fonction u est dérivable en 0, $u(0) = 1$ et $u'(0) = -\dfrac{u(0)}{3u(0)^2} = -\dfrac{1}{3}$ donc

$$u(x) = 1 - \frac{1}{3}x + o(x)$$

au voisinage de 0.

7) a) D'après la relation de la question 4 on a $xu(x) = 1 - u(x)^3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xu(x) = 1$ et donc

$$u(x) \sim \frac{1}{x}$$

au voisinage de $+\infty$.

b) On a

$$u(x) - \frac{1}{x} = -\frac{u(x)^3}{x} \sim -\frac{1}{x^4}$$

au voisinage de $+\infty$.