Correction du DNS 23

EXERCICE 1

1) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0 &\Leftrightarrow \alpha(X^2+2X+a) + \beta(1-X^2) + \gamma(2X^2+6X+4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha - \beta + 2\gamma)X^2 + (2\alpha + 6\gamma)X + a\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 6\gamma = 0 \\ a\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3\gamma - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = -3\gamma \\ -3a\gamma + \beta + 4\gamma = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = -\gamma \\ \alpha = -3\gamma \\ (-3a+3)\gamma = 0 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Si $a \neq 1$, alors $-3a+3 \neq 0$ donc le système équivaut à $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Si $a = 1$, le système devient $\left\{\begin{array}{l} \beta = -\gamma \\ \alpha = -3\gamma \end{array}\right.$. En prenant par exemple $\gamma = 1$, on obtient que $-3P - Q + R = 0$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est une famille liée.

b) Si $a \neq 1$ alors $\mathcal{F}$ est libre. De plus $\operatorname{card} \mathcal{F} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est donc également génératrice.

Si $a = 1$ alors $\mathcal{F}$ est liée. Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle ne peut donc pas être génératrice, sinon ce serait une base puisque $\operatorname{card} \mathcal{F} = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

c) Soient α, β et γ des réels. Alors :

$$\begin{aligned}
\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0 &\Leftrightarrow \alpha(X^2+2X+a) + \beta(1-X^2) + \gamma(2X^2+6X+4) = X^2 \\
&\Leftrightarrow (\alpha - \beta + 2\gamma)X^2 + (2\alpha + 6\gamma)X + a\alpha + \beta + 4\gamma = X^2 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha + 6\gamma = 0 \\ \beta + 4\gamma = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\gamma = 1 \\ \alpha = -3\gamma \\ \beta = -4\gamma \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = -4/3 \\ \gamma = 1/3 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

On a donc $X^2 = -P - \dfrac{4}{3}Q + \dfrac{1}{3}R$: les coordonnées de X^2 dans $\mathcal{F}$ sont $(-1, -4/3, 1/3)$.

EXERCICE 2

1) a) Si L_i vérifie $(*)$ alors $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ sont racines de L_i.

Par conséquent L_i est divisible par $(X-x_1)\ldots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots(X-x_n)$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_i = (X-x_1)\ldots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots(X-x_n)Q$.

Or $\deg L_i = n-1$ et $\deg (X-x_1)\ldots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots(X-x_n) = n-1$ donc Q est un polynôme constant. Le polynôme L_i est donc nécessairement de la forme

$$L_i = \lambda(X-x_1)\ldots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots(X-x_n)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Pour que L_i vérifie $(*)$ il faut également que $L_i(x_i) = 1$, soit $\lambda(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n) = 1$, donc

$$\lambda = \frac{1}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{2}X + 3,\\
L_2 &= \frac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)} = -X^2 + 4X - 3,\\
L_3 &= \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1.
\end{aligned}$$

2) a) Pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$ on a $P(x_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$ car $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(x_i) = 1$.

b) Montrons que la famille $(L_1,\ldots,L_n)$ est libre. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0$. Alors pour tout j on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = 0$ soit $\alpha_j = 0$ d'après la question précédente. La famille est libre.
De plus, elle est de cardinal n et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3) a) Il suffit de prendre $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$. Alors pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$ on aura $P(x_j) = y_j$ d'après 2)a).

b) Supposons que $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ conviennent tous deux. Alors pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a $P_1(x_k) = P_2(x_k) = y_k$ donc $(P_1 - P_2)(x_k) = 0$. Les réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (qui sont deux à deux distincts) sont donc des racines de $P_1 - P_2$: ce polynôme a donc au moins n racines. Or le degré de $P_1 - P_2$ est inférieur ou égal à $n-1$, donc $P_1 - P_2 = 0$, d'où $P_1 = P_2$.
Conclusion : P est unique.

c) D'après 1)c) et 3)a), le polynôme cherché est $P = 2L_1 + 5L_2 - L_3 = -\dfrac{9}{2}X^2 + \dfrac{33}{2}X - 10$.