Devoir n°26 (non surveillé)

EXERCICE 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \cos t\, dt$ et $y_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin t\, dt$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sin 1 - (n+1)y_n$ et $y_{n+1} = -\cos 1 + (n+1)x_n$.

3) En déduire des équivalents simples de x_n et de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 - Noyau de Dirichlet et problème de Bâle

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

On a déjà vu que la suite (S_n) est convergente. On va retrouver la valeur de sa limite en utilisant le noyau de Dirichlet défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

1) Démontrer que $D_n(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \not\equiv 0\,[2\pi]$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x D_n(x)\, dx$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, dx = \frac{-1+(-1)^k}{k^2}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

b) En déduire que $L_n = \dfrac{\pi^2}{4} - S_n + T_n$.

3) Montrer que la fonction f définie sur l'intervalle $]0,\pi]$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$ est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

4) a) Soit $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(\lambda x)\, dx = 0.$$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.

5) a) Montrer que $S_{2n} + T_{2n} = \dfrac{S_n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Retrouver finalement la valeur de la limite de la suite (S_n).