Fiche d'exercices : Applications linéaires

Exercice 1 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Le cas échéant, déterminer leurs réciproques.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(x, y) = (3x - 5y, -4x + 3y)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(x, y) = (x, x)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x, y, z) = (x + z, 0, x + z)$.
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_4(x, y, z) = (y, z, x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_5(x, y) = (2x + 3y, -x - 4y, 5x + y)$.
6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_6(x, y, z) = (x + y - z, -2x - y + 2z)$.

Exercice 2 Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et leurs images.

1. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = XP(X + 1) - (X + 1)P(X)$.
2. $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = 2M^T - \mathrm{Tr}(M)I$.
3. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(P) = (P(i) + P(j))_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$.
4. $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $D(P) = P'$.
5. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = XP' - P$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$ définie par $f(M) = AM$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ lorsque $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Donner une CNS pour que f soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 4 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Soit $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto \ln x, x \mapsto x \ln x)$.

1) Quelle est la dimension de F ?

2) Soit l'application $\varphi : E \to E$ définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(f)(x) = xf'(x)$. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif, surjectif ?

3) Montrer que F est stable par φ et déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de F induit par φ.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On considère l'application φ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n))$.

1) Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

2) En déduire que, pour tout n-uplet $(y_1, \dots, y_n)$ de réels, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 6 Soit l'application φ de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ qui à toute suite (u_n) associe la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que φ est linéaire. Est-elle injective, surjective ? Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Exercice 7 Soient f, g, h et k les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $g(z) = \mathrm{Im}(z)$, $h(z) = |z|$ et $k(z) = \overline{z}$.

1) $\mathbb{C}$ est muni de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Ces applications sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{C}$? Déterminer alors leur noyau et leur image.

2) Même question lorsque $\mathbb{C}$ est muni de sa structure canonique de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 8 Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$ et que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

2) Montrer que : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

3) Montrer que : $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(g \circ f) \Leftrightarrow F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

4) Montrer que : $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par g.

Exercice 10 Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient G et H deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $f(G + H) = f(G) + f(H)$.

2) Montrer que si f est injective et que G et H sont en somme directe, alors $f(G)$ et $f(H)$ le sont aussi.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 12 Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient G et H deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f(G) \subset f(H)$ si et seulement si $G + \mathrm{Ker}\, f \subset H + \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 13 Soient E, F deux espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$ et que $F = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que f est bijectif et déterminer f^{-1}.

2) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$.

Exercice 16 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que si $\dim E < \dim F$ alors f n'est pas surjective et que si $\dim E > \dim F$ alors f n'est pas injective.

Exercice 17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$ si et seulement si n est pair.

Exercice 18 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ et $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

Exercice 19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que les suites $(\operatorname{Ker} f^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\operatorname{Im} f^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont stationnaires à partir d'un même rang p.

2) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

Exercice 20 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $h \in \mathcal{L}(E,G)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $h = g \circ f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} h$.

Exercice 21 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

2) Montrer que $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

Exercice 22 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

2) En déduire que le commutant de f est $\operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \dots, f^{n-1})$.

Exercice 23 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit l'application $f : F \times G \to F + G$ définie par $f(x,y) = x + y$.

1) Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

2) Montrer que l'application $g : \operatorname{Ker} f \to F \cap G$ définie par $g(x,y) = x$ est bijective.

3) En déduire que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 24 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1) $f : (x,y,z) \mapsto (x - y - z, 2x - 2y - 2z, -2x + 2y + 2z)$.

2) $g : (x,y,z) \mapsto (3x - 2y + 4z, 2x - y + 4z, -x + y - z)$.

Exercice 25 Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\varphi(P)(X) = \dfrac{1}{2}(P(X) + P(1-X))$ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 26 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E. On considère la droite vectorielle D définie dans $\mathcal{B}$ par le système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ et le plan vectoriel P d'équation $x + 2y + 2z = 0$ dans $\mathcal{B}$.

1) Déterminer une base de D et une base de P et montrer qu'ils sont supplémentaires.

2) Déterminer l'expression analytique de la projection sur P parallèlement à D.

3) Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

Exercice 27 Soit $E = K_n[X]$ et soit A un polynôme de degré m avec $0 < m \leqslant n$. Soit F l'ensemble des polynômes P de E tels que A divise P.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $G = K_{m-1}[X]$. Montrer que $E = F \oplus G$ et étudier la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 28 Soient p et q deux projecteurs tels que $q \circ p = p \circ q$.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

2) Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$ et que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Exercice 29 Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2) Montrer que dans ce cas $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 30 Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E et soit F un sous-espace de E. Montrer que $p(F) = (F + \operatorname{Ker} p) \cap \operatorname{Im} p$ et que $p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) \oplus \operatorname{Ker} p$.

Exercice 31 Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$ si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

2) Montrer que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice 32 Soit E un espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \operatorname{Id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 33 Soit E un espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que f et g sont des projecteurs ayant le même noyau si et seulement si $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

Exercice 34 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p un projecteur de E tels que $f = g \circ p$.

Exercice 35 Soit E un espace vectoriel réel et soit f un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.

2) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3) f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \emptyset$.

4) Le noyau et l'image de f sont supplémentaires.

5) Si a et b sont deux réels distincts alors $\operatorname{Ker}(f - a\operatorname{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - b\operatorname{Id})$ sont en somme directe.

6) f est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Id} - f$ est un projecteur.

7) f est un projecteur si et seulement si $2f - \operatorname{Id}$ est une symétrie.