Corrigé DS7

Exercice 1 : Guerre du Hyrule !

1. On applique le théorème du moment cinétique au satellite dans le référentiel hyrulocentrique. La satellite est soumis uniquement à la force gravitationnelle de la planète :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(S)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_g = r\vec{u}_r \wedge \left(-G\frac{mM_H}{r^2}\vec{u}_r\right) = \vec{0} \implies \boxed{\vec{L}_O(S) = \overrightarrow{\text{Cste}}}$$

Par définition du moment cinétique ($\vec{L}_O(S) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$), le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ets orthogonal à tout instant au moment cinétique. Puisque ce dernier est constant, on conclut que **le mouvement est contenu dans le plan passant par O et orthogonal à $\vec{L}_O(S)$**.

2. On projette le moment cinétique dans la base cylindrique :

$$\vec{L}_O(S) = r\vec{u}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Le moment cinétique est un vecteur constant. La masse m et le vecteur $\vec{u}_z$ le sont aussi. On conclut que $\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{Cste}}$. Cette grandeur est appelée **constante des aires**.

3. On applique le principe fondamental de la dynamique au satellite, qu'on projette sur $\vec{u}_r$. Au passage on rappelle que pour un mouvement circulaire le vecteur accélération, qui s'écrit $\vec{a} = -r_1\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r_1\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$, peut également s'écrire $\vec{a} = -\frac{v_1^2}{r_1}\vec{u}_r + \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$, avec $v_1 = r_1\dot{\theta}$ la coordonnée du vecteur vitesse.

$$-m\frac{v_1^2}{r_1} = -G\frac{mM_H}{r_1^2} \iff \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM_H}{r_1}} = 28\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

La période orbitale vaut :

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \iff \boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM_H}} = 4\text{h}22'}$$

4. La constante des aires vaut : $C = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$. On détermine son expression en se plaçant au moment du lancer ($r_0 = R_H$ et $v_{\theta,0} = v_0\sin\alpha$) :

$$C = R_H v_0 \sin\alpha = R_H\sqrt{\frac{GM_H}{R_H}}\sin\alpha \iff \boxed{C = \sin\alpha\sqrt{GM_H R_H}}$$

5. Voir cours : $\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{GmM_H}{r}}$.

6. On exprime l'énergie mécanique en se plaçant au moment du lancer :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM_H}{R_H} = \frac{GmM_H}{2R_H} - \frac{GmM_H}{R_H} \iff \boxed{E = -\frac{GmM_H}{2R_H}}$$

L'énergie mécanique est strictement négative donc le satellite est **dans un état lié**. La trajectoire ne peut pas être circulaire car l'angle α est quelconque (il faudrait nécessairement $\alpha = \pi/2$ pour que la trajectoire soit circulaire). Par conséquent dans le cas général la trajectoire est **elliptique**. On identifie son demi-grand axe, sachant que pour une orbite elliptique $E = -\frac{GmM_H}{2a}$:

$$-\frac{GmM_H}{2R_H} = -\frac{GmM_H}{2a} \iff \boxed{a = R_H}$$

7. Les rayons r_A et r_P correspondent respectivement au maximum et au minimum du rayon r du satellite sur son orbite, par conséquent en ces deux points $\dot{r} = 0$. En reprenant les résultats des questions 4, 5 et 6 on écrit l'équation vérifiée par r_A et r_P :

$$-\frac{GmM_H}{2R_H} = \frac{GmM_H R_H\sin^2\alpha}{2r^2} - \frac{GmM_H}{r} \iff -\frac{1}{2R_H} = \frac{R_H\sin^2\alpha}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

$$\iff -r^2 = R_H^2\sin^2\alpha - 2R_H r$$

$$\iff \boxed{r^2 - 2R_H r + R_H^2(1-\cos^2\alpha) = 0}$$

8. On calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = 4R_H^2 - 4R_H^2(1-\cos^2\alpha) = 4R_H^2\cos^2\alpha$. On exprime les deux racines :

$$r = R_H \pm R_H\cos\alpha \implies \boxed{r_A = R_H(1+\cos\alpha)} \quad \text{et} \quad \boxed{r_P = R_H(1-\cos\alpha)}$$

À partir des expressions de e et p fournies on trouve :

$$\boxed{e = \cos\alpha} \quad ; \quad \boxed{p = R_H\sin^2\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{r(\theta) = \frac{R_H\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha\cos\theta}}$$

9. La base B_B se trouve dans la direction $\theta = \frac{\beta}{2}$. Le missile atteint sa cible à condition que :

$$r\left(\frac{\beta}{2}\right) = R_H \iff \frac{R_H\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}} = R_H \iff 1-\cos\alpha\cos\tfrac{\beta}{2} = \sin^2\alpha$$

$$\iff \cos^2\alpha = \cos\alpha\cos\tfrac{\beta}{2}$$

$$\iff \cos\alpha = \cos\tfrac{\beta}{2}$$

$$\iff \boxed{\alpha = \tfrac{\beta}{2}}$$

10. L'altitude maximale se calcule quand le satellite est à l'apogée ($\theta = 0$) et vaut :

$$h_{\max} = r_A - R_H = \frac{R_H\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos\frac{\beta}{2}} - R_H \iff \boxed{h_{\max} = R_H\left(\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\cos\frac{\beta}{2}} - 1\right) = 2{,}9\cdot 10^4\,\text{km}}$$

11. On exprime la période orbitale à l'aide de la **troisième loi de Kepler** : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_H}$. Dans le cas présent on a vu que $a = R_H$ d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_H^3}{GM_H}}$:

$$\boxed{\Delta t = 2I\sin^3\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{R_H^3}{GM_H}} = 1\text{h}06'}$$

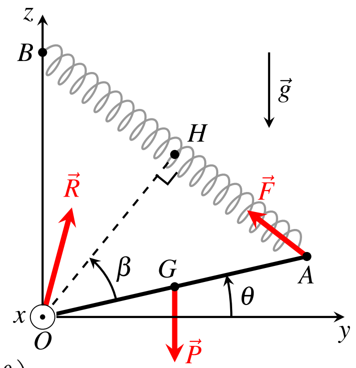
Exercice 2 : Sismographe de Lacoste

1. Dans le triangle OAB on trace la hauteur issue de O. Comme ce triangle est isocèle en O ($OA = OB = \ell$), cette hauteur est également une bissectrice. On peut alors écrire que :

$$2\beta + \theta = \frac{\pi}{2} \iff \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

On conclut par projection que :

$$\boxed{AB = 2AH = 2\ell \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$



2. La force de rappel du ressort a pour norme : $\|\vec{F}\| = kAB$. D'après la règle de la main droite son moment par rapport à (Ox) est positif. Enfin son bras de levier vaut $b = OH = \ell \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_x(\vec{F}) = b\|\vec{F}\| &= k \times 2\ell \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \ell \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\\ &= k\ell^2 \times 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\\ &= k\ell^2 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\\ &= \boxed{k\ell^2 \cos\theta}\end{aligned}$$

3. On applique le théorème du moment cinétique à la tige OA, par rapport à l'axe (Ox), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$ (s'applique au centre de la tige G), à la force de rappel du ressort ainsi qu'à la réaction $\vec{R}$ de l'axe (Ox) :

$$J_x\ddot{\theta} = \mathcal{M}_x(\vec{P}) + \mathcal{M}_x(\vec{F}) + \mathcal{M}_x(\vec{R})$$

Le bras de levier du poids vaut $b(\vec{P}) = \frac{\ell}{2}\cos\theta$ et, d'après la règle de la main droite : $\mathcal{M}_x(\vec{P}) = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$. Le bras de levier de la réaction est nul donc $\mathcal{M}_x(\vec{R}) = 0$. On obtient finalement :

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + k\ell^2\cos\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2\ell} - \frac{3k}{m}\right)\cos\theta = 0}$$

4. Les positions d'équilibre vérifient : $\left(\frac{3g}{2\ell} - \frac{3k}{m}\right)\cos\theta = 0$. La parenthèse peut être nulle en théorie mais en pratique elle ne l'est jamais rigoureusement, si bien que les seules positions d'équilibre vérifient $\cos\theta = 0$. On conclut que $\boxed{\theta_{\text{eq}} = \pm\pi/2}$.

5. Une position d'équilibre de la tige vérifie :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}) + \mathcal{M}_x(\vec{F}) + \mathcal{M}_x(\vec{R}) = 0 \iff k\ell^2\cos(\theta+\alpha) - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = 0$$

La position $\theta = 0$ peut être une position d'équilibre à condition que :

$$k\ell^2\cos\alpha - mg\frac{\ell}{2} = 0 \iff \boxed{\cos\alpha = \frac{mg}{2k\ell}}$$

6. On applique à nouveau le théorème du moment cinétique à la tige par rapport à (Ox) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} &= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + k\ell^2\cos(\theta+\alpha)\\ &= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + k\ell^2\left(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\right)\\ &= \underbrace{\left(-mg\frac{\ell}{2} + k\ell^2\cos\alpha\right)}_{=0}\cos\theta - k\ell^2\sin\alpha\sin\theta\end{aligned}$$

Finalement, après linéarisation dans l'approximation des petits angles, on obtient : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3k\sin\alpha}{m}\theta = 0}$.

Enfin, en posant $\frac{k}{m} = \frac{g}{2\ell\cos\alpha}$ (Q.5), on exprime la pulsation des petites oscillations : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3g\tan\alpha}{2\ell}}}$.

7. On estime l'angle α : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g\tan\alpha}} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{8\pi^2\ell}{3gT^2}\right) = 1{,}5°}$.

Exercice 3 : Détente d'un gaz parfait

1. D'après l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{n_0 = \frac{P_0V_A}{RT_0} = 0{,}10\,\text{mol}}$.

2.a) Le gaz parfait est diatomique donc $\boxed{U = \frac{5}{2}n_0RT_0}$. Puisque la température est la même dans les deux enceintes dans l'état final, l'énergie interne s'écrit également $U = \frac{5}{2}n_0RT_f$. Par conservation de l'énergie interne, on en déduit que $\boxed{T_f = T_0}$.

2.b) On exprime la loi des GP dans les deux enceintes et la conservation de la quantité de matière :

$$P_fV_A = n_ART_0\ (1) \quad ; \quad P_fV_B = n_BRT_0\ (2) \quad ; \quad n_A + n_B = n_0\ (3)$$

$(1)+(2) \longrightarrow P_f(V_A+V_B) = n_0RT_0 \implies \boxed{P_f = \frac{n_0RT_0}{V_A+V_B} = 3{,}6\,\text{bar}}$.

On en déduit que $\boxed{n_A = \frac{P_fV_A}{RT_0} = 71\,\text{mmol}}$ et $\boxed{n_B = n_0 - n_A = 29\,\text{mmol}}$.

3.a) Dans l'état d'équilibre initial, l'énergie interne s'écrit $U = \dfrac{5}{2}n_0RT_0$. Dans l'état final, elle vaut $U = \frac{5}{2}n_ART_A + \frac{5}{2}n_BRT_B$. Par conservation de l'énergie interne, on en déduit que $\boxed{n_0T_0 = n_AT_A + n_BT_B}$.

3.b) On exprime à nouveau la loi des GP dans les deux enceintes et la conservation de la quantité de matière :

$$P_fV_A = n_ART_0\ (1) \quad ; \quad P_fV_B = n_BRT_B\ (2) \quad ; \quad n_A + n_B = n_0\ (3) \quad ; \quad n_0T_0 = n_AT_A + n_BT_B\ (4)$$

On arrive à un système de quatre équations à quatre inconnues (P_f, n_A, n_B et T_A). En utilisant (4) et (1) + (2), on obtient $P_f(V_A+V_B) = n_0RT_0 \implies \boxed{P_f = \frac{n_0RT_0}{V_A+V_B} = 3{,}6\,\text{bar}}$. Ensuite, on en déduit immédiatement $\boxed{n_B = \frac{P_fV_B}{RT_B} = 36\,\text{mmol}}$ puis $\boxed{n_A = n_0 - n_B = 64\,\text{mmol}}$. Enfin, $\boxed{T_A = \frac{P_fV_A}{n_AR} = 333\,\text{K}}$.