

DS de physique n°7

Durée : 3h

*L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et **les résultats soulignés ou encadrés**. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte trois exercices indépendants.*

Exercice 1 : Guerre sur Hyrule !

Dans un monde imaginaire, deux peuples cohabitent sur la planète Hyrule : les Amicaux et les Belliqueux. Les premiers vivent en harmonie sur une terre fertile tandis que les seconds subissent les affres d'un climat hostile. Malgré les échanges commerciaux qui existent entre les deux nations, les Belliqueux traversent régulièrement des périodes de famine, si bien qu'un jour leur chef Ganondorf déclare la guerre aux Amicaux afin de s'approprier leur terre et les réduire en esclavage !

Les Amicaux, prévenus de l'attaque à venir, préparent leur riposte. Les deux peuples ayant des technologies avancées, chacun possède une base militaire avec un arsenal de missiles pouvant à tout moment être lancés sur l'ennemi. Les Amicaux décident d'utiliser un satellite espion pour tenter de localiser la base adverse. Ce satellite S supposé ponctuel et de masse m est en orbite autour de la planète Hyrule (centre O , masse M_H , rayon R_H). On mène l'étude dans le référentiel *hyrulocentrique* supposé galiléen.

Données : Constante de gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI, $M_H = 8,2 \cdot 10^{26}$ kg, $R_H = 3,3 \cdot 10^4$ km.

Partie 1 : Satellite espion

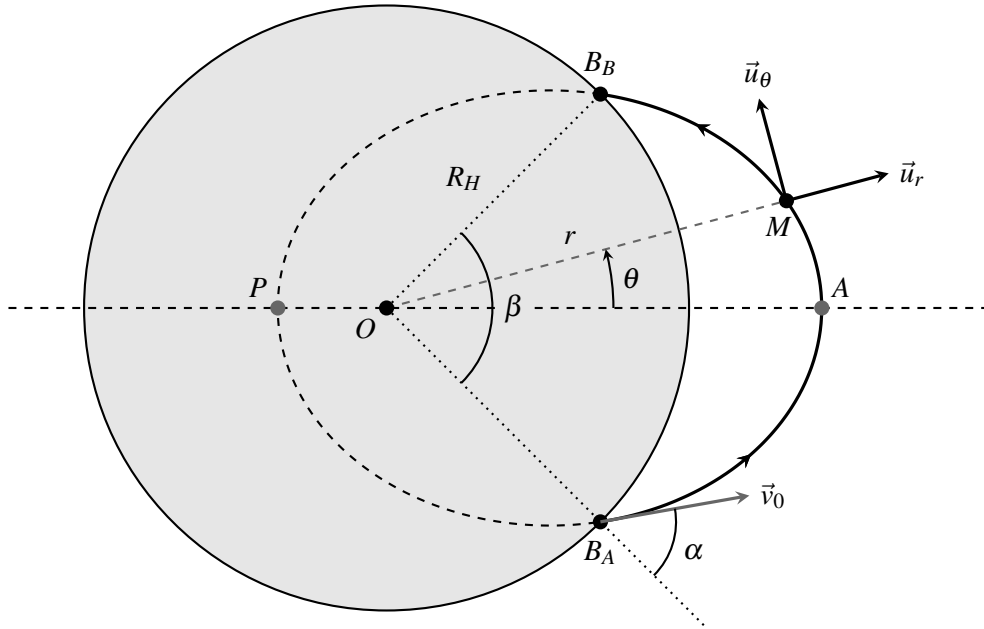
1. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O(S)$ se conserve. Justifier alors que le mouvement du satellite est plan. Par la suite on se placera dans un repère cylindrique de centre O et d'axe (Oz) perpendiculaire au plan du mouvement.
2. Justifier que pour le satellite la grandeur $C = r^2 \dot{\theta}$ est constante. Quel nom lui donne-t-on ?
3. Le satellite est placé sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 7,0 \cdot 10^4$ km. Établir l'expression de sa vitesse v_1 et de sa période orbitale T_1 . Faire les applications numériques.

Partie 2 : Tir balistique

Le satellite a rempli sa mission et la base secrète des Belliqueux est découverte ! Les Amicaux préparent l'envoi d'un missile depuis leur base située en B_A , en direction de la base ennemie située en B_B (voir figure en page suivante). Il s'agit d'un missile balistique dont le mouvement, pour simplifier, est supposé être guidé uniquement par l'attraction gravitationnelle d'Hyrule.

On considère le missile M de masse m tiré depuis B_A avec une vitesse $v_0 = \sqrt{\frac{GM_H}{R_H}}$ dans une direction faisant un angle α avec la verticale locale. La trajectoire est prévue pour être une ellipse passant par B_B . On note β l'écart angulaire entre les positions des deux bases, à la surface d'Hyrule.

On se propose de déterminer l'angle α qui permet au missile d'atteindre la base des Belliqueux en B_B .



On mesure la direction angulaire θ du missile en prenant comme direction de référence celle de l'apocentre A. Dans ce cas on admet que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

avec p le paramètre de la trajectoire et e son excentricité. En notant respectivement r_A et r_P le rayon de l'apocentre A et celui du péricentre P, on montre alors que :

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \quad \text{et} \quad p = \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P}$$

4. Montrer que la constante des aires du missile s'écrit : $C = \sin \alpha \sqrt{GM_H R_H}$.

Dans les questions suivantes on cherche à déterminer les expressions de r_A et r_P .

5. Justifier que l'énergie mécanique E du missile se conserve. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

avec $E_{p,\text{eff}}(r)$ à exprimer en fonction de G , m , M_H , C et r .

6. Exprimer E à partir des conditions initiales. Justifier que la trajectoire est elliptique et déterminer son demi-grand axe a .

7. Montrer que r_A et r_P sont solutions de l'équation du second degré : $r^2 - 2R_H r + R_H^2 (1 - \cos^2 \alpha) = 0$.

8. Exprimer r_A et r_P en fonction de R_H et α . En déduire les expressions de e et p , puis celle de $r(\theta)$.

9. Déterminer une relation entre α et β pour que le missile atteigne B_B .

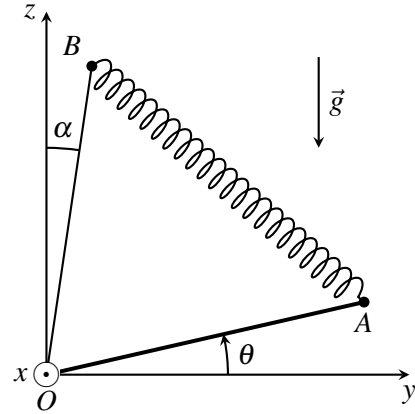
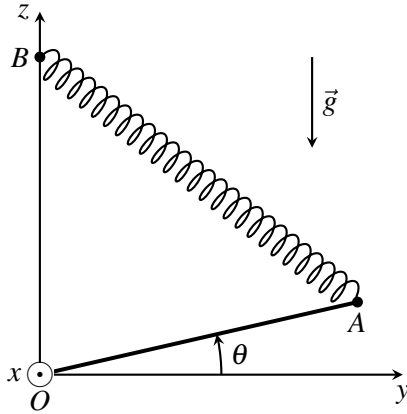
10. Application numérique : on donne $\beta = 60^\circ$. Calculer l'altitude maximale du missile.

11. En notant T la période orbitale de la trajectoire elliptique, on montre que le temps de vol Δt du missile entre B_A et B_B s'écrit sous la forme :

$$\Delta t = I \frac{\sin^3 \alpha}{2\pi} T \quad \text{avec} \quad I = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \frac{d\theta}{\left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \cos \theta\right)^2} \simeq 39$$

Calculer Δt .

Exercice 2 : Sismographe de Lacoste



Un sismographe de Lacoste est constitué d'une tige rigide homogène OA qui peut pivoter sans frottement autour de l'axe (Ox) . Un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide nulle relie l'extrémité A de la tige à l'extrémité B d'une autre tige rigide OB , immobile. L'angle fixe entre la tige OB et la verticale ascendante (Oz) est noté α (voir figure ci-dessus, à droite). Le ressort AB est toujours rectiligne.

La tige OA est de masse m et de longueur ℓ . Son moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) vaut $J_x = \frac{1}{3}m\ell^2$.

La tige OB est elle aussi de longueur ℓ .

L'angle θ entre l'axe (Oy) et la tige OA peut varier entre $-\pi/2$ et $\pi/2 - \alpha$.

Dans un premier temps on suppose que $\alpha = 0$ (figure ci-dessus, à gauche).

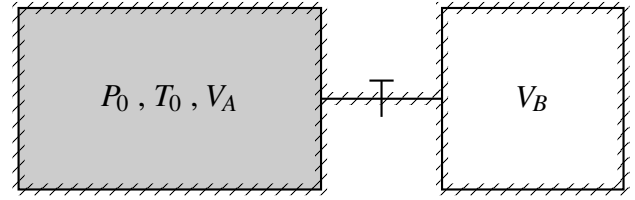
1. Exprimer la distance AB en fonction de ℓ et θ .
2. Montrer que le moment de la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, par rapport à (Ox) , vaut : $\mathcal{M}_x(\vec{F}) = k\ell^2 \cos \theta$.
3. Établir l'équation du mouvement de la tige OA à l'aide du théorème du moment cinétique.
4. Quelles sont les positions d'équilibre du système ?

On peut s'arranger pour que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable, en inclinant la tige OB d'un angle α non nul. On admet que le moment de la force de rappel devient $\mathcal{M}_x(\vec{F}) = k\ell^2 \cos(\theta + \alpha)$.

5. Montrer que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre pour la tige à condition que $\cos \alpha = \frac{mg}{2k\ell}$. Par la suite on suppose que cette condition est vérifiée.
6. Établir l'équation des petites oscillations de la tige OA autour de la position d'équilibre $\theta = 0$. Exprimer la pulsation des petites oscillations en fonction de g , ℓ et α .
7. Sachant que $g \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\ell \sim 1 \text{ m}$, estimer α pour avoir une période d'oscillations d'environ 10 secondes.

Exercice 3 : Détente d'un gaz parfait

Deux enceintes indéformables et calorifugées, de volumes $V_A = 500\text{ cm}^3$ et $V_B = 200\text{ cm}^3$, peuvent communiquer entre elles grâce à un tube de volume négligeable, muni d'un robinet lui aussi calorifugé. Initialement, le robinet est fermé, l'enceinte A est remplie d'un gaz parfait diatomique à la pression $P_0 = 5\text{ bar}$ et à la température $T_0 = 300\text{ K}$, tandis que l'enceinte B est vide. On donne $R = 8,31\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.



1. Calculer la quantité de matière n_0 en gaz initialement présente dans l'enceinte A.
2. Dans une première expérience, on ouvre le robinet puis on laisse le système évoluer jusqu'à ce que l'équilibre mécanique et thermique s'établisse entre les deux enceintes. On admet qu'au cours de cette transformation, **l'énergie interne totale du gaz se conserve**.
 - 2.a) Donner l'expression de l'énergie interne du gaz en fonction de n_0 et de T_0 . Utiliser l'hypothèse de conservation de l'énergie interne totale pour calculer la température finale dans les deux enceintes.
 - 2.b) Déterminer littéralement et numériquement la pression et la quantité de matière en gaz dans chaque enceinte dans l'état d'équilibre final.
3. Généralement, l'équilibre mécanique s'établit beaucoup plus rapidement que l'équilibre thermique. Dans une deuxième expérience, on ouvre le robinet un très court instant, suffisamment long pour que l'équilibre mécanique s'établisse entre les deux enceintes **mais pas l'équilibre thermique**, puis on le referme. On note P_f , T_A et n_A (resp. P_f , T_B et n_B) la pression, la température et la quantité de matière dans l'enceinte A (resp. dans l'enceinte B) à l'état d'équilibre final. On mesure $T_B = 240\text{ K}$.
 - 3.a) En raisonnant à nouveau sur la conservation de l'énergie interne, établir une relation entre n_0 , n_A , n_B , T_0 , T_A et T_B .
 - 3.b) Déterminer littéralement et numériquement P_f , n_B , n_A et T_A .