Devoir n°27 (non surveillé)

Partie I

1) Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ et déterminer la solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(1) = 0$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

a) Étudier sur $]0,+\infty[$ les variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + 1 - 2\ln x$. Montrer, en le justifiant soigneusement, qu'elle s'annule en un unique point α de l'intervalle $]0,+\infty[$.

b) Étudier les variations de f. On vérifiera que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(1+x^2)^2}$ pour tout $x > 0$.

c) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 1.

d) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère du plan. On donne $\alpha \approx 1{,}9$ et $f(\alpha) \approx 0{,}14$.

Partie II

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\,,\ F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt.$$

1) a) Expliquer pourquoi le réel $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.

b) Quel est le signe de $F(x)$ si $x > 1$? Et si $x < 1$?

2) Justifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis étudier les variations de F.

3) Déterminer le développement limité de F à l'ordre 2 en 1.

4) Montrer que : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5) a) Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, $F(x) = \operatorname{Arctan}(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\, dt$.

c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction ainsi prolongée.

d) En utilisant le théorème de limite de la dérivée, montrer que F n'est pas dérivable en 0. Que peut-on néanmoins affirmer pour la courbe représentative de F au point d'abscisse 0 ?

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(0)$.

6) Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. On veut montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = F(0)$.

a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln t\, dt$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0} I_k(x)$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 0$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in\,]0,1[$, on a la majoration $\left| F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leqslant I_{2n+2}(x)$.

d) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$, et conclure.

7) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère du plan. On donne $F(0) \approx 0{,}92$.

Le nombre $F(0)$ est appelé **constante de Catalan**. Comme la constante d'Euler, on ne sait pas si elle est rationnelle ou irrationnelle.