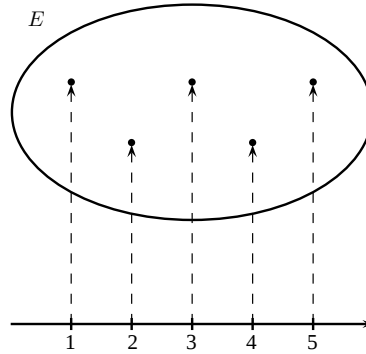


DÉNOMBREMENT

1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1 On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans E . Sinon on dit que E est **infini**.



Proposition 1 Soient n et p deux entiers naturels non nuls. S'il existe une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, p\}$, alors $n = p$.

Démonstration : Admis. $\square$

Corollaire 2 Soit E un ensemble. S'il existe une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans E , alors n est unique. On l'appelle le **cardinal de E** et on le note $\text{card } E$, ou $|E|$, ou encore $\#E$.

Démonstration : Supposons que l'on ait deux bijections $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$ et $g : \{1, \dots, p\} \rightarrow E$. Alors $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, p\}$ et donc $n = p$. $\square$

Par convention, on pose $\text{card } \emptyset = 0$. Dans la suite du cours, on se contentera de la définition intuitive du cardinal comme nombre d'éléments d'un ensemble.

Proposition 3 Soient E un ensemble fini et F un sous-ensemble de E . Alors F est aussi un ensemble fini et $\text{card } F \leq \text{card } E$. De plus, si $\text{card } F = \text{card } E$, alors $F = E$.

Démonstration : Admis. $\square$

Application : pour montrer que deux ensembles finis sont égaux, on peut montrer que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même cardinal.

Proposition 4 Soit E un ensemble fini et soient A et B deux sous-ensembles de E .

- (i) Si A et B sont disjoints (i.e. si $A \cap B = \emptyset$), alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.
- (ii) Dans le cas général, $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$.
- (iii) $\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$.

Pour le (ii), l'idée est que dans $\text{card } A + \text{card } B$ les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois.

Démonstration :

Le (i) est admis. Pour le (ii) on se ramène à la proposition précédente en écrivant que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$: les ensembles A et $B \setminus A$ sont disjoints, donc $\text{card}(A \cup (B \setminus A)) = \text{card } A + \text{card}(B \setminus A)$.

Or en écrivant que $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ (encore une union disjointe), on a $\text{card } B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$, donc $\text{card}(B \setminus A) = \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$ et le résultat s'ensuit.

(iii) : $E = A \cup \bar{A}$ et A et $\bar{A}$ sont disjoints, donc $\text{card } E = \text{card } A + \text{card } \bar{A}$. $\square$

Proposition 5 Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ aussi, et :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}.$$

Démonstration :

Soit $n = \text{card } E$. Posons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Pour construire un sous-ensemble F de E , on peut prendre x_1 , ou ne pas le prendre : 2 possibilités. On peut prendre x_2 , ou ne pas le prendre : 2 possibilités, et ainsi de suite jusqu'à x_n .

Au total on a donc $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ manières différentes de construire F (on peut faire un arbre). $\square$

Proposition 6 Soient E et F deux ensembles finis. Alors le produit cartésien $E \times F$ est fini, et :

$$\text{card}(E \times F) = (\text{card } E) \times (\text{card } F).$$

Démonstration : Il suffit de poser $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $F = \{y_1, \dots, y_p\}$, d'expliciter $E \times F$ et de compter ses éléments. $\square$

Plus généralement, on montre par récurrence que si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ aussi, et $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_n)$.

En particulier, si E est fini et que $p \in \mathbb{N}^*$, alors E^p est fini et $\text{card}(E^p) = (\text{card } E)^p$. Les éléments de E^p sont appelés des **p -uplets** ou des **p -listes** de E . Par exemple :

- Les 2-listes de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ et $(3, 3)$. Il y en a $3^2 = 9$.
- Les 3-listes de l'ensemble $\{1, 2\}$ sont $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ et $(2, 2, 2)$. Il y en a $2^3 = 8$.

2 Applications entre ensembles finis

Proposition 7 Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal, et soit f une application de E dans F . Alors :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

Démonstration :

Soient $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Si f est injective, alors les éléments $f(x_1), \dots, f(x_n)$ sont deux à deux distincts. Par conséquent, $f(E)$ est de cardinal n . Or $f(E) \subset F$, donc $f(E) = F$ et f est surjective.

Si f n'est pas injective, alors il existe deux éléments de E qui ont la même image par f . Mais alors le cardinal de $f(E)$ est strictement inférieur à n , donc $f(E) \neq F$ et f n'est pas surjective. $\square$

Proposition 8 Soient E et F deux ensembles finis. Alors F^E est fini, et le nombre d'applications de E dans F est :

$$\text{card}(F^E) = (\text{card } F)^{\text{card } E}.$$

Démonstration :

Soient $n = \text{card } E$ et $p = \text{card } F$. Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Définir une application f de E dans F , c'est choisir dans F les valeurs de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\dots$, $f(x_n)$. Or pour chacun de ces choix on a p possibilités puisque $\text{card } F = p$.

Il y a donc $p \times p \times \dots \times p = p^n$ manières différentes de définir f (on peut faire un arbre). $\square$

Proposition 9 Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n . Le nombre d'applications injectives de E dans F est $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

Démonstration :

Il y a n choix possibles pour $f(x_1)$, $n-1$ choix possibles pour $f(x_2)$ (qui doit être différent de $f(x_1)$), etc. Si $p > n$ on ne peut pas construire f . Si $p \leq n$ il y a $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ manières différentes de définir f . $\square$

Remarque : Soit E un ensemble de cardinal n . Un **p -arrangement** de E est une p -liste de E dont les éléments sont deux à deux distincts. On voit que définir un p -arrangement de E revient à définir une application injective de $\{1, \dots, p\}$ dans E : le nombre de p -arrangements de E est donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon. Par exemple :

- Les 2-arrangements de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ et $(3, 2)$. Il y en a $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$.
- Il n'y a aucun 3-arrangement de l'ensemble $\{1, 2\}$.

Définition 2 Soit E un ensemble. Une **permutation** de E est une bijection de E dans E .

Exemples :

- Soit $E = \{a, b\}$. Il existe deux permutations de E : l'identité et l'application f définie par $f(a) = b$ et $f(b) = a$.
- Soit $E = \{a, b, c\}$. Les permutations de E peuvent être définies par $(f(a), f(b), f(c)) = (a, b, c)$ ou (a, c, b) ou (b, a, c) ou (b, c, a) ou (c, a, b) ou (c, b, a) , soit au total 6 permutations.

Proposition 10 Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration : Conséquence immédiate des propositions 7 et 9. On peut voir aussi que la liste des images d'une permutation est un n -arrangement. $\square$

3 Combinaisons

Définition 3 Soit E un ensemble fini de cardinal n . Soit $p \in \mathbb{N}$. Une **combinaison** de E à p éléments (ou **p -combinaison** de E) est un sous-ensemble de E de cardinal p .

Exemple : Soit $E = \{a, b, c\}$. La seule 0-combinaison de E est l'ensemble vide. Les 1-combinaisons de E sont $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$. Les 2-combinaisons de E sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$. La seule 3-combinaison de E est E lui-même. Si $p > 3$ il n'y a aucune p -combinaison de E .

Rappel : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$ et 0 sinon.

Proposition 11 Le nombre de p -combinaisons d'un ensemble fini de cardinal n est $\binom{n}{p}$.

Démonstration :

Supposons $p \leq n$ (sinon le résultat est 0). Les éléments d'une p -combinaison ne sont pas ordonnés, ceux d'un p -arrangement le sont. À toute p -combinaison de E correspondent donc $p!$ p -arrangements (le nombre de manières de permuer les éléments), et deux combinaisons différentes donnent des arrangements différents. Ainsi le nombre de p -arrangements est égal à $p!$ fois le nombre de p -combinaisons. $\square$

Remarque : Dans les problèmes de dénombrement, on prendra soin de bien distinguer les p -listes (ordonnées, avec répétitions), les p -arrangements (ordonnés, sans répétitions) et les p -combinaisons (non ordonnées, sans répétitions).

Exercice 1

Soient n et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

1) On tire simultanément k boules de l'urne.

- a) Combien y a-t-il de tirages possibles (on ne tient pas compte de l'ordre) ?
- b) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent la boule numéro 1 ?

2) Reprendre la question 1 en supposant qu'on tire les boules une par une et en tenant compte de l'ordre.

3) Reprendre la question 1 en supposant qu'on remet à chaque fois la boule tirée et en tenant compte de l'ordre.

On donne pour finir des démonstrations combinatoires de certaines propriétés déjà rencontrées, en particulier la formule de Pascal et la formule du binôme de Newton.

Proposition 12 Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration :

Soit E un ensemble de cardinal n . Alors l'application $F \mapsto \overline{F}$ définit une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles de E à p éléments et l'ensemble des sous-ensembles de E à $n-p$ éléments, donc ces deux ensembles ont le même cardinal, ce qui donne le résultat voulu. $\square$

Proposition 13 Pour tout entier naturel n :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

Démonstration :

Soit E un ensemble de cardinal n . Il y a $\binom{n}{0}$ sous-ensembles de E de cardinal 0, $\binom{n}{1}$ sous-ensembles de E de cardinal 1, ..., $\binom{n}{n}$ sous-ensembles de E de cardinal n . Le nombre de sous-ensembles de E est donc égal à $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$. D'après la proposition 5, ce nombre est aussi égal à 2^n . $\square$

Proposition 14 Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 < p < n$. Alors :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :

Soit E un ensemble de cardinal n , et soit a un élément de E fixé.

Alors les sous-ensembles de E de cardinal p sont de deux types : ceux qui contiennent a et ceux qui ne contiennent pas a . Ceux qui contiennent a sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$ (car l'un des éléments étant a , il reste à choisir $p-1$ éléments dans $E \setminus \{a\}$ qui est de cardinal $n-1$). Ceux qui ne contiennent pas a sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$ (on choisit p éléments dans $E \setminus \{a\}$).

Par conséquent $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$. $\square$

Proposition 15 Soient x et y deux nombres réels ou complexes, et soit n un entier naturel. Alors :

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} y^p.$$

Démonstration :

En développant le produit $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$ on obtient une somme de termes de la forme $x^p y^q$. Pour construire chacun de ces termes, on choisit x ou y dans le premier facteur, x ou y dans le deuxième facteur, etc. On a donc nécessairement $p+q=n$ puisqu'il y a n facteurs.

Pour obtenir un terme de la forme $x^p y^{n-p}$, on choisit p fois x parmi les n facteurs : il y a $\binom{n}{p}$ possibilités, donc autant de termes de ce type dans le résultat. $\square$