Chapitre 18

PROBABILITÉS

I Espaces probabilisés

1 Univers

Définition 1 *Une* **expérience aléatoire** *est une expérience qui, renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas le même résultat à chaque fois.* **L'univers** *associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des* **résultats possibles** *(ou* **issues** *ou* **réalisations***) de cette expérience.*

Par exemple, soit l'expérience consistant à lancer un dé à six faces. Les résultats possibles de cette expérience sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et l'univers associé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si on lance deux dés l'un après l'autre et que l'on considère le couple de chiffres obtenus, l'univers associé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

En première année, on supposera toujours que l'univers est fini.

2 Événements

Définition 2 *Soit Ω un univers fini.*

Un **événement** *est une partie de Ω, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Un **événement élémentaire** *est un singleton de Ω, c'est-à-dire un événement de cardinal 1.*

L'événement impossible *est l'ensemble vide.* **L'événement certain** *est Ω.*

Si A est un événement, **l'événement contraire à** *A est $\overline{A}$.*

Si A et B sont deux événements, l'événement A **et** *B est $A \cap B$ et l'événement A* **ou** *B est $A \cup B$. On dit que A et B sont* **incompatibles** *si $A \cap B = \emptyset$. On dit que A* **implique** *B si $A \subset B$.*

Un **système complet d'événements** *est une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de Ω deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω : $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.*

Reprenons l'expérience consistant à lancer un dé à six faces. Les événements "Obtenir 1", ..., "Obtenir 6" sont les singletons $\{1\}, \dots, \{6\}$: ce sont les événements élémentaires de l'expérience. L'événement P: "Obtenir un nombre pair" est l'ensemble $\{2, 4, 6\}$, l'événement I: "Obtenir un nombre impair" est l'ensemble $\{1, 3, 5\}$, c'est l'événement contraire à P. La famille (P, I) est un système complet d'événements de Ω.

3 Probabilité

Définition 3 *Une* **probabilité** *sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Un **espace probabilisé fini** *est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.*

Proposition 1

(i) Pour tout couple (A, B) d'événements, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(ii) Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(iii) $P(\emptyset) = 0$.

(iv) P est croissante : si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

(v) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

(vi) Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$.

(vii) Pour tout événement A, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Démonstration :

(i) On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (union disjointe) donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$, et $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ (union disjointe) donc $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$, et le résultat s'ensuit.

(ii) $A \cup \overline{A} = \Omega$ (union disjointe), donc $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$.

(iii) $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0$.

(iv) $B = A \cup (B \setminus A)$ (union disjointe) donc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A)$.

(v) Récurrence immédiate si I est fini. Sinon, seul un nombre fini des A_i est non vide.

(vi) Conséquence immédiate de (v).

(vii) $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ et (v). $\square$

Ainsi l'application P est entièrement déterminée par les images des singletons : si on connaît la probabilité des événements élémentaires, on peut calculer la probabilité de tous les événements.

Définition 4 *Une* **distribution de probabilité** *sur un ensemble E est une famille de réels positifs indexée par E et de somme 1.*

Si P est une probabilité sur Ω, alors la famille $(P(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilité sur Ω.

4 Équiprobabilité

Définition 5 *Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dit que P est une* **probabilité uniforme** *si les événements élémentaires sont* **équiprobables***, c'est-à-dire s'ils ont tous la même probabilité :*

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{card} \Omega}.$$

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}.$$

Les calculs de probabilités se ramènent alors à des problèmes de dénombrement.

Exercice 1 On tire sans remise cinq cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre as ? D'obtenir au moins un as ?

Exercice 2 Dans une classe de n élèves, quelle est la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour ? On ne tiendra pas compte des années bisssextiles.

II Conditionnement et indépendance

1 Probabilités conditionnelles

Définition 6 *Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$. La* **probabilité conditionnelle de B sachant** *A est le réel noté $P(B|A)$ ou $P_A(B)$ défini par :*

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Proposition 2 *L'application $P_A : B \mapsto P_A(B)$ est une probabilité sur Ω.*

Démonstration :

Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(A)$, donc $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$. De plus, $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$. Enfin, si B_1 et B_2 sont disjoints, alors $B_1 \cap A$ et $B_2 \cap A$ aussi, donc $P_A(B_1 \cup B_2) = \dfrac{P(A \cap (B_1 \cup B_2))}{P(A)} = \dfrac{P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2))}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B_1)}{P(A)} + \dfrac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = P_A(B_1) + P_A(B_2)$. $\square$

Exercice 3 Une famille a deux enfants.

1) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

2) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?

3) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

2 Formule des probabilités composées

Proposition 3 *Soit* $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille d'événements. Si* $P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})\neq 0$*, alors :*

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)\times\ldots\times P(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Démonstration :
Notons d'abord que toutes les probabilités conditionnelles qui interviennent dans la formule sont bien définies car, puisque $A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}\subset A_1\cap\ldots\cap A_{n-2}\subset\ldots\subset A_1$, on a $P(A_1)\geqslant\ldots\geqslant P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-2})\geqslant P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})>0$.
On démontre maintenant la formule par récurrence. Pour $n=2$, elle s'écrit $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\times P(A_2|A_1)$ qui est une conséquence immédiate de la définition de $P(A_2|A_1)$.

Soit $n\geqslant 2$. Supposons la formule vraie au rang n. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille d'événements telle que $P(A_1\cap\ldots\cap A_n)\neq 0$. Alors $P(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1})=P(A_1\cap\ldots\cap A_n)\times P(A_{n+1}|A_1\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)\times\ldots\times P(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})\times P(A_{n+1}|A_1\cap\ldots\cap A_n)$ par hypothèse de récurrence. La formule est donc vraie au rang $n+1$, et la récurrence est établie. □

Exercice 4 Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires. On y tire une à une et sans remise trois boules. Quelle est la probabilité que les deux premières soient blanches et la troisième noire ?

3 Formule des probabilités totales

Proposition 4 *Soit* $(A_1,\ldots,A_n)$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors, pour tout événement* B *:*

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i).$$

Démonstration : $B=B\cap\Omega=B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$ (union disjointe), donc $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)$. □

Remarques :

1) En pratique, on pourra écrire la formule même si certains A_i ont une probabilité nulle en posant dans ce cas, par convention, $P(B|A_i)P(A_i)=0$.

2) En particulier, si A est un événement, alors la famille $(A,\overline{A})$ est un système complet d'événements, donc pour tout événement B on a :

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A}).$$

Exercice 5 On dispose de trois dés non pipés ayant respectivement 6, 10 et 20 faces. On choisit un dé au hasard et on le lance. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

4 Formules de Bayes

Proposition 5 *Si* A *et* B *sont deux événements tels que* $P(A)>0$ *et* $P(B)>0$*, alors :*

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Démonstration : $P(A|B)P(B)=P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$. □

Corollaire 6 *Si* $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est un système complet d'événements de probabilités non nulles et que* B *est un événement de probabilité non nulle, alors, pour tout* $j\in\{1,\ldots,n\}$ *:*

$$P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Démonstration : Conséquence immédiate de la proposition précédente et de la formule des probabilités totales. □

Exercice 6 On dispose de trois dés non pipés ayant respectivement 6, 10 et 20 faces. On choisit un dé au hasard et on le lance. On obtient un 6. Quelle est la probabilité d'avoir lancé le premier dé ?

Exercice 7 On considère un test de dépistage d'une maladie présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Si la personne testée est malade, le test est positif dans 99% des cas. Si elle n'est pas malade, il est positif dans 0,1% des cas. Que penser de ce test ?

5 Indépendance

Définition 7 *Deux événements A et B sont* **indépendants** *si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Par exemple, si on tire une carte d'un jeu de 32 cartes, les événements A : "La carte tirée est un as" et B : "La carte tirée est un pique" sont indépendants puisque $P(A) = 1/8$, $P(B) = 1/4$ et $P(A \cap B) = 1/32$.

Proposition 7 *Si $P(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.*

Démonstration : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$. □

Ainsi, dire que deux événements sont indépendants revient à dire que la réalisation de l'un d'eux ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Proposition 8 *Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.*

Démonstration :
L'idée est d'écrire que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Puisque c'est une union disjointe on a

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(B) + P(A \cap \overline{B}),$$

donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

et donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. □

Définition 8 *Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont :*

(i) **indépendants deux à deux** *si, pour tout $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$.*

(ii) **(mutuellement) indépendants** *si, pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$, $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.*

Par exemple, trois événements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants si :

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times P(A_2) \\
P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_3) \\
P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \times P(A_3) \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3).
\end{aligned}$$

L'indépendance implique l'indépendance deux à deux (il suffit de considérer les parties de $\{1, \dots, n\}$ à deux éléments), mais **la réciproque est fausse**.

Par exemple, considérons le lancer successif de deux dés équilibrés et les événements A : "Le premier dé est pair", B : "Le second dé est pair", et C : "La somme des deux dés est paire". Alors on a facilement $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = \dfrac{1}{4} = P(B)P(C)$: les événements A, B et C sont indépendants deux à deux. En revanche, on a $A \cap B \subset C$ donc $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ alors que $P(A)P(B)P(C) = \dfrac{1}{8}$: A, B et C ne sont pas indépendants.

Proposition 9 *Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$, où $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, le sont aussi.*