Correction du DNS 26

EXERCICE 1

1) Pour tout $t \in [0,1]$ on a $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ donc $-t^n \leqslant t^n \cos t \leqslant t^n$ et $-t^n \leqslant t^n \sin t \leqslant t^n$. En intégrant ces encadrements entre 0 et 1 on obtient

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{n+1} \leqslant y_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc, par le théorème des gendarmes, (x_n) et (y_n) tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Bien entendu on pouvait aussi majorer en valeur absolue.

2) On intègre par parties : on pose $u(t) = t^{n+1}$ (d'où $u'(t) = (n+1)t^n$) et pour avoir $v'(t) = \cos t$ on pose $v(t) = \sin t$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient :

$$x_{n+1} = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt = \sin 1 - (n+1) y_n.$$

De même, on intègre par parties en posant $u(t) = t^{n+1}$ (d'où $u'(t) = (n+1)t^n$) et en posant $v(t) = -\cos t$ pour avoir $v'(t) = \sin t$:

$$y_{n+1} = \left[-t^{n+1} \cos t\right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n \cos t \, dt = -\cos 1 + (n+1) x_n.$$

3) D'après ce qui précède on a $x_n = \dfrac{y_{n+1} + \cos 1}{n+1}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{n+1} = 0$, donc $x_n \sim \dfrac{\cos 1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

De même $y_n = \dfrac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = 0$, donc $y_n \sim \dfrac{\sin 1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

1) On peut raisonner par récurrence ou passer par les complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1 - e^{ix}} \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique avec } e^{ix} \neq 1) \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{i\frac{nx}{2}} \left(-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\
&= \frac{e^{i\frac{nx}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

En utilisant les formules de transformation de produits en sommes on a

$$\frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) + \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2}.$$

Donc finalement

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) - \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

2) a) Il suffit d'intégrer par parties :

$$\int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx = \left[\frac{x \sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
L_n &= \int_0^\pi x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(kx)\right) dx \\
&= \int_0^\pi \frac{x}{2}\,dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k-1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - S_n + T_n.
\end{aligned}$$

3) Au voisinage de 0 $\sin\frac{x}{2} \sim \dfrac{x}{2}$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} = 2.$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=2$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ (quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) et, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Le dénominateur de cette fraction est équivalent à $\dfrac{x^2}{4}$ au voisinage de 0, et

$$\sin\tfrac{x}{2} - \tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} \overset{0}{=} \tfrac{x}{2} + o(x^2) - \tfrac{x}{2}(1+o(x)) \overset{0}{=} o(x^2),$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Ainsi, d'après le théorème de limite de la dérivée, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ (et $f'(0)=0$).

4) a) Soit $\lambda > 0$. En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx &= \left[-\frac{\varphi(x)\cos(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos(\lambda x)\,dx \\
&= \frac{\varphi(0)-\varphi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos(\lambda x)\,dx.
\end{aligned}$$

Le terme de gauche tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et puisque φ' est continue sur $[0,\pi]$, elle y est bornée, donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\varphi'(x)\cos(\lambda x)|\,dx \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\varphi'(x)|\,dx \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \sup_{[0,\pi]}|\varphi'|\,dx \\
&\leqslant \frac{\pi}{\lambda}\sup_{[0,\pi]}|\varphi'|.
\end{aligned}$$

qui tend aussi vers 0 quand λ tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0.$$

b) En utilisant la question 1 on voit qu'on peut écrire

$$xD_n(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

pour tout $x \in]0,\pi]$, donc

$$xD_n(x) = \frac{1}{2}f(x)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

pour tout $x \in [0, \pi]$, où f est la fonction prolongée de la question 3. Ainsi

$$L_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right) x\right) dx$$

Or la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, donc d'après la question précédente, L_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} + T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 + (-1)^k}{k^2}.$$

Les termes d'indices impairs de cette somme s'annulent. Pour les termes d'indices pairs on pose $k = 2j$, ce qui donne

$$S_{2n} + T_{2n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{(2j)^2} = \frac{2}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = \frac{S_n}{2}.$$

b) On sait que la suite (S_n) converge et la suite (S_{2n}) est une suite extraite de (S_n) donc elle converge vers la même limite, qu'on note S.

D'après les questions 2)b) et 4)b), la suite (T_n) converge vers $S - \dfrac{\pi^2}{4}$, donc la suite (T_{2n}) aussi.

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $S_{2n} + T_{2n} = \dfrac{S_n}{2}$, on obtient

$$S + S - \frac{\pi^2}{4} = \frac{S}{2}$$

qui donne finalement

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$