# Chapitre 26 : Statique des fluides

## 1 Loi fondamentale de la statique des fluides

### 1.1 Modélisation d'un fluide au repos macroscopique dans le champ de pesanteur terrestre

On cherche à décrire dans ce chapitre les propriétés mécaniques d'un fluide (liquide ou gaz) au repos macroscopique, soumis à la pesanteur terrestre. Les dimensions des systèmes étudiés sont suffisamment faibles à l'échelle du rayon terrestre pour négliger la courbure de la Terre et faire l'approximation que le champ gravitationnel est uniforme.

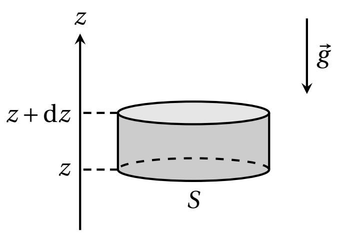
On munit l'espace d'un repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire vertical ascendant. Le champ de pesanteur s'écrit donc $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

Le fluide est *localement* en équilibre thermodynamique, c'est-à-dire que l'on peut diviser le fluide en **cellules élémentaires mésoscopiques** décrites par certaines variables d'état intensives (pression, température, masse volumique, etc). Ces variables dépendent uniquement de l'altitude ($P(z)$, $T(z)$, $\rho(z)$).

Chaque cellule élémentaire de fluide est en équilibre mécanique avec le fluide environnant.

On ne fait pas d'hypothèse *a priori* concernant le champ de température $T(z)$. Nous verrons plus tard au cas par cas différentes manières de modéliser la situation, en fonction du système étudié (océan, atmosphère terrestre par exemple).

L'objectif de ce chapitre consiste essentiellement à déterminer les variations de la pression d'un fluide avec l'altitude, dans le cas d'un liquide ou d'un gaz. Nous établissons d'abord dans le cas général l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$, appelée **loi fondamentale de la statique des fluides**. Pour cela nous étudions l'équilibre d'une tranche élémentaire de fluide, cylindrique d'axe vertical, de section quelconque $S$, située entre les altitudes $z$ et $z + \mathrm{d}z$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen (voir figure ci-contre).




Nous assimilons cette portion infinitésimale de fluide de volume $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$ à un **système fermé** qui contient une masse $\mathrm{d}m$. On définit la **masse volumique locale** $\rho(z)$ du fluide par $\boxed{\rho(z) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}}$.

### 1.2 Bilan des forces extérieures

Le système étudié est soumis à :

- son poids $\mathrm{d}\vec{P}$ ;
- la résultante des forces de pression exercées par le fluide environnant $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{p}$.

Rq : On dit que le poids est une force **volumique** car il agit sur l'ensemble du fluide situé à l'intérieur du système. Les forces électriques et magnétiques, qui peuvent agir sur certains types de fluides, rentrent également dans cette catégorie. Les forces volumiques sont des actions qui s'exercent **à distance** entre deux corps.
Les forces de pression sont appelées forces **surfaciques** car elles agissent à l'interface entre le système et son environnement. Les forces de viscosité ou celles liées à la tension superficielle rentrent également dans cette catégorie. Les forces surfaciques sont des actions **de contact** entre deux corps.

Dans le cas particulier qui nous intéresse la composante horizontale des forces de pression qui s'exerce sur la tranche de fluide est nulle, par symétrie. On trouve alors que la résultante volumique des forces de pression, définie par $\vec{f}_\mathrm{p} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}V}$, vaut :

$$\vec{f}_\mathrm{p} = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z$$

On admet l'expression la plus générale de la résultante volumique des forces de pression, dans le cas où la pression dépend des trois coordonnées d'espace :

$$\boxed{\vec{f}_\mathrm{p} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P}$$

### 1.3 Loi fondamentale de la statique des fluides

En étudiant l'équilibre d'un élément de fluide soumis à son poids et aux forces de pression, on aboutit à une équation générale qui relie, en statique, le champ de pression et le champ de pesanteur, appelée loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}P = \rho\vec{g}}$$

Dans le cas particulier du repère d'étude choisi la projection de la loi fondamentale sur $\vec{u}_z$ conduit à :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g}$$

Cette équation permet de déterminer le champ de pression dans un fluide à l'équilibre mécanique, dans le champ de pesanteur terrestre. Notons que la résolution nécessite de connaître **l'équation d'état** du fluide, reliant $\rho(z)$ à $P(z)$. Nous traitons dans ce chapitre deux cas simples, les fluides incompressibles et homogènes d'une part et les gaz parfaits d'autre part.
Rq : attention aux signes, cette équation est écrite dans le cas d'un axe $(\mathrm{O}z)$ **ascendant**. On remarquera au passage qu'en statique la pression diminue toujours avec l'altitude.

### 1.4 Surface libre

On appelle surface libre l'interface entre un liquide et un gaz, ou l'interface entre deux liquides non miscibles. On retient que **la pression est toujours continue à la traversée d'une surface libre**.

# 2 Fluide incompressible et homogène

## 2.1 Définition

Un fluide incompressible et homogène a une masse volumique uniforme et indépendante de la pression. On est alors dans le cas où $\boxed{\rho(z) = \text{Cste}}$.

## 2.2 Loi du nivellement barométrique

Par intégration de la loi fondamentale, on détermine la loi de pression dans un fluide incompressible homogène :

$$P(z) = -\rho g z + \text{Cste}$$

La pression augmente de manière affine avec la profondeur dans un liquide au repos.

Application : calculer, dans l'eau liquide ($\rho_e = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$), le dénivelé qui correspond à une variation de pression égale à 1 bar.

Application : à quelle pression un submersible doit-il résister dans le cas d'une observation de l'épave du Titanic (située à 3,8 km sous le niveau de la mer) ?

## 2.3 Principe des vases communiquants

Dans un liquide homogène la pression est une fonction de l'altitude, ce qui signfie que **deux points d'un liquide homogène qui sont à la même altitude sont également à la même pression**.

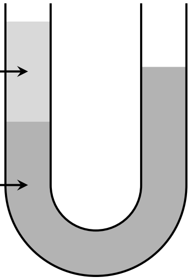
Dans le cas où le liquide est en contact mécanique avec l'atmosphère la pression est uniforme au niveau de la surface libre, égale à la pression atmosphérique.

Si plusieurs vases ouverts sur l'atmosphère communiquent de sorte que le liquide peut circuler de l'un à l'autre, alors à l'équilibre la pression est la même au niveau de chaque surface libre et donc **toutes les surfaces libres se trouvent à la même altitude**.

**Attention** : cette propriété n'est plus vérifiée si le liquide est hétérogène (exemple : tube en U rempli avec deux liquides non miscibles, voir ci-contre et le premier paragraphe de la fiche méthode).

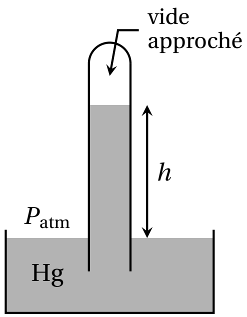
Application : la hauteur d'huile dans le tube de gauche est $H = 5{,}0\,\text{cm}$, le dénivelé entre les deux surfaces libres est $h = 7{,}5\,\text{mm}$. La masse volumique de l'eau liquide est $\rho_e = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Calculer la masse volumique de l'huile.




## 2.4 Baromètre de Torricelli

Un baromètre est un appareil destiné à mesurer la pression atmosphérique. Torricelli en propose un exemple en 1643. Son dispositif consiste à créer une dépression à l'intérieur d'un tube renversé au-dessus d'une cuve remplie de mercure liquide. La différence de pression entre l'intérieur du tube et l'atmosphère provoque une ascension du mercure liquide sur un certain dénivelé. Dans la limite où l'on néglige la pression au sommet du tube on montre que la hauteur d'équilibre de la colonne est proportionnelle à la pression atmosphérique. C'est pour cette raison que la pression atmosphérique est parfois exprimée en millimètres de mercure!




Application : calculer la hauteur de la colonne de mercure ($\rho_m = 13{,}6\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) dans le cas où $P_{\text{atm}} = 1\,\text{atm} = 1013\,\text{hPa}$.

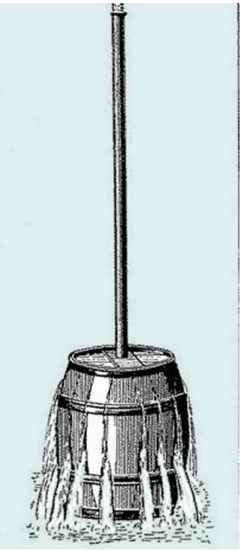
## 2.5 Principe de Pascal

Le principe de Pascal est une conséquence directe de la loi du nivellement barométrique :

> Dans un fluide au repos, toute variation de pression en un point du fluide s'accompagne d'une égale variation de pression en tout point du fluide

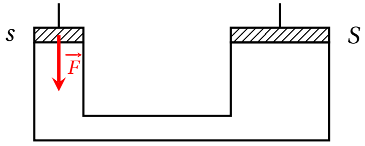
### 2.5.1 Tonneau de Pascal

Un tube vertical surplombe un tonneau rempli d'eau. A mesure que l'on remplit le tube d'eau, la pression à l'intérieur du tonneau augmente rapidement en vertu du principe de Pascal. Sous l'effet de la pression, le tonneau se dilate puis se met à fuir.



### 2.5.2 Cric hydraulique

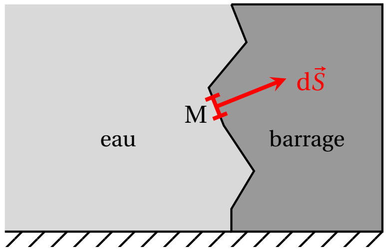
Un cric hydraulique est un système qui permet d'exercer de grandes forces de compression. Il fonctionne à l'aide d'un circuit hydraulique très simple, constitué d'un canal dont la section n'est pas la même aux deux extrémités. Lorsqu'on exerce un effort sur la section $s$ la plus faible, celui-ci est amplifié à l'autre extrémité d'un facteur $\frac{S}{s}$.



# 3 Calcul d'une résultante des forces de pression

## 3.1 Force exercée sur une surface quelconque

La force de pression qui s'exerce sur une surface $(S)$ de forme quelconque, soumise à l'action d'un champ de pression quelconque (éventuellement non-uniforme), s'obtient en décomposant $(S)$ en surfaces infinitésimales $d\vec{S}$ et en sommant les forces de pression qui s'exercent sur chacune d'entre elles. Chaque élément de surface est centré sur un point M où la pression locale est $P(\mathrm{M})$.



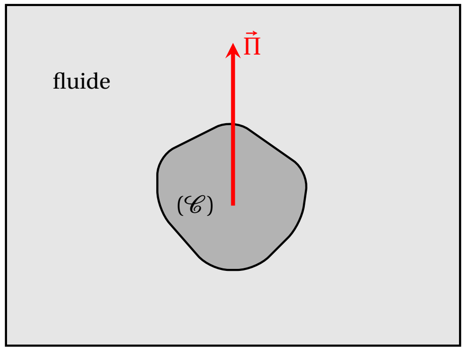

$$\boxed{\vec{F}_p = \iint_{(S)} P(\mathrm{M})\,d\vec{S}}$$

Application : exercice 3 du TD (voir également la fiche méthode).

## 3.2 Corps entièrement immergé : loi d'Archimède

On considère désormais le cas particulier d'un corps $(\mathscr{C})$ entièrement immergé dans un fluide au repos dans un référentiel galiléen.

Def : on appelle poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le corps $(\mathscr{C})$.




La loi d'Archimède permet d'obtenir très simplement l'expression de la résultante des forces de pression.

La poussée d'Archimède qui s'exerce sur un corps au repos immergé dans un fluide au repos est égale à **l'opposé du poids du fluide déplacé**.

Rq : la loi d'Archimède est valable **en statique uniquement**. On considère généralement qu'elle reste valable en première approximation lorsque l'objet se déplace "lentement" dans le fluide.

Rq : la loi d'Archimède est également valable si le corps est immergé dans plusieurs fluides (ex : glaçon flottant, partiellement immergé dans l'air et partiellement immergé dans l'eau). On décompose alors la poussée d'Archimède en plusieurs termes (ex pour le glaçon : $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{eau} + \vec{\Pi}_{air}$) et on applique la loi d'Archimède pour chaque fluide comme s'il était seul.

Lorsqu'on s'intéresse à la condition d'équilibre d'un corps homogène de masse volumique $\rho$ dans un fluide de masse volumique $\rho_f$, on met en évidence que :

- si $\rho < \rho_f$, la poussée d'Archimède l'emporte sur le poids. Le corps ne peut rester en équilibre : il remonte et le cas échéant flotte au niveau de la surface libre.
- si $\rho > \rho_f$, le poids l'emporte sur la poussée d'Archimède, le corps plonge dans le liquide.
- si $\rho = \rho_f$, alors le poids et la poussée d'Archimède se compensent parfaitement. Le corps reste en équilibre dans le fluide.

Application : Equilibre d'un iceberg à la surface de l'eau.

# 4 Modèle de l'atmosphère isotherme

## 4.1 Hypothèses du modèle

Contrairement aux liquides, les gaz sont très compressibles. Par conséquent, leur masse volumique dépend fortement de la pression. On va chercher à résoudre la loi fondamentale de l'hydrostatique pour étudier l'équilibre de l'atmosphère terrestre. Pour cela, nous allons effectuer plusieurs hypothèses simplificatrices :

- L'atmosphère terrestre est modélisée par un espace semi-infini repéré par un axe $(Oz)$ vertical ascendant dont l'origine est prise au niveau de la surface,
- L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ ,
- On suppose que la température est uniforme dans toute l'atmosphère : $T = 273\,\mathrm{K}$,
- On suppose le champ de pesanteur terrestre uniforme dans toute l'atmosphère : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

## 4.2 Équation d'état intensive du gaz parfait

On a vu que pour intégrer la loi fondamentale il est nécessaire de connaître l'équation d'état du fluide. Dans le cas d'un gaz parfait on montre que la masse volumique est proportionnelle à la pression. L'équation d'état du gaz parfait, sous forme intensive, s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\rho = \frac{PM}{RT}}$$

## 4.3 Loi de pression

Sous ces hypothèses, on montre que la loi de pression dans l'atmosphère, en fonction de l'altitude $z$, s'écrit sous la forme :

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)}$$

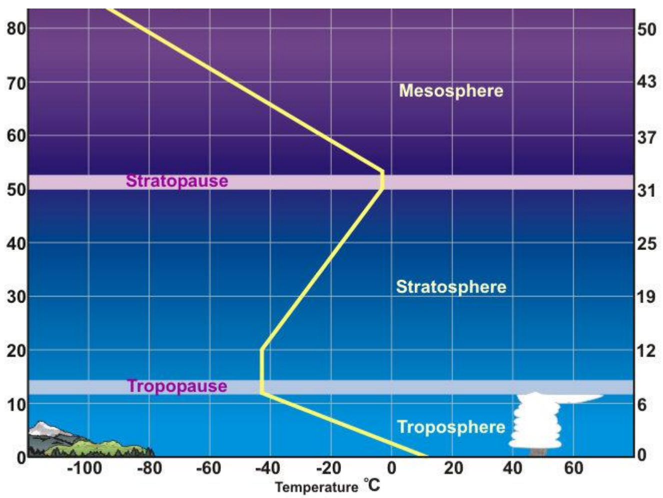
Où $P_0 = 1$ bar est la pression à la surface et $R$ est la constante des gaz parfaits. On fait apparaître une altitude caractéristique de décroissance de la pression :

$$\boxed{H = \frac{RT}{Mg} \simeq 8\,\text{km}}$$

Au-delà d'une altitude de quelques $H$, la pression et la densité particulaire deviennent quasiment nulles. On en déduit que la quasi-totalité de la matière qui compose l'atmosphère est comprise dans une couche de quelques dizaines de kilomètres d'épaisseur, c'est-à-dire bien inférieure au rayon terrestre.

Application : ascension d'un ballon atmosphérique : exercice 5 du TD, voir également la fiche méthode.

Rq : Le modèle isotherme de l'atmosphère est extrèmement simplifié mais il permet d'obtenir de bon ordres de grandeur, notamment concernant l'épaisseur de l'atmosphère. Pour une modélisation plus fine du champ de température il faut tenir compte des differents transferts thermiques qui s'opèrent au sein de l'atmosphère, en particulier via le flux solaire et le flux géothermique, mais également les différents courants verticaux et horizontaux qui circulent à la surface de la Terre (courant-jet, cellules de Hadley, etc). La figure ci-dessous montre le profil de température vertical mesuré dans l'atmosphère terrestre.




On y voit que l'atmosphère peut être décomposée en plusieurs couches selon la verticale. La troposphère est la couche la plus basse de l'atmosphère, d'une épaisseur d'environ 10 km. Dans cette couche la circulation convective de l'air est importante et conduit à profil de température non pas uniforme mais **de gradient vertical uniforme**. Autrement dit un modèle plus pertinent, dans la troposphère, consiste à considérer que **la température varie de façon affine avec l'altitude** (la température diminue typiquement d'environ 6,5 K par kilomètre vertical).

Application : exercice 6 du TD (ultra-classique!).

## 4.4 Facteur de Boltzmann

Si l'on considère que l'atmosphère est un corps pur composé de molécules identiques de masse $m$, on peut écrire la loi de pression sous la forme suivante :

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)}$$

Dans l'atmosphère, la loi de pression traduit une compétition entre la pesanteur qui a pour effet de plaquer toutes les molécules au sol et l'agitation thermique qui a tendance à répartir les molécules uniformément dans tout l'espace disponible. La distribution des particules dans l'atmosphère peut aussi s'interpréter de manière statistique. La **probabilité** qu'une particule se trouve à une altitude $z$ est proportionnelle à :

$$\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$$

où $e_p$ est l'énergie potentielle de pesanteur de la particule. On appelle ce terme **facteur de Boltzmann**. On le rencontre régulièrement quand on étudie à l'échelle microscopique l'état d'équilibre thermodynamique d'un système à température $T$ fixée. Il est notamment au cœur de **l'hypothèse de Maxwell-Boltzmann** :

> Quand un système thermodynamique est caractérisé par une énergie $\mathscr{E}$ qui peut prendre différentes valeurs (discrètes ou continues) alors, à l'équilibre thermodynamique de température $T$ fixée, la probabilité que le système ait une énergie égale à $\mathscr{E}$ est proportionnelle à $\exp(-\mathscr{E}/k_B T)$.

Citons deux domaines dans lesquels le facteur de Boltzmann intervient :

- lorsqu'un gaz parfait est à l'équilibre thermodynamique, la probabilité qu'une particule possède une énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2}mv^2$ est proportionnelle à $\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$.
- La loi d'Arrhénius indique la façon dont la constante de vitesse $k$ d'une réaction chimique varie en fonction de la température. Si l'énergie d'activation $E_a$ (en $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$) de la réaction chimique est indépendante de la température alors $k = A\exp(-\mathscr{E}_a/k_B T)$ où $\mathscr{E}_a = E_a/\mathscr{N}_A$ est l'énergie d'activation rapportée à une seule molécule.