

Chapitre 26 : Statique des fluides

Fiche méthode

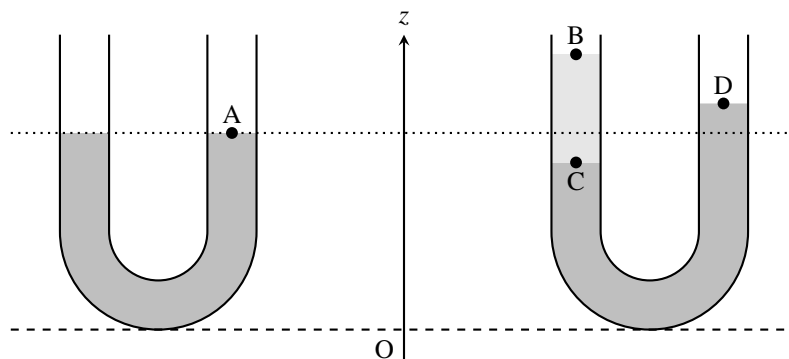
1 Liquide en équilibre mécanique : loi du nivellement barométrique

Situation : On considère un tube en U rempli d'eau jusqu'à une hauteur $H = 10\text{cm}$ par rapport au fond. La section du tube est $s = 1,0\text{cm}^2$. On ajoute $2,0\text{cm}^3$ d'huile dans une des branches du tube. La densité de l'huile est égale à 0,6.

1. À quelle hauteur se trouve l'interface entre l'eau et l'huile ?
2. À quelle hauteur se trouve la surface libre de l'eau dans l'autre branche ?

► Schématiser la situation

On représente le système dans l'équilibre mécanique initial et final. L'huile étant moins dense que l'eau elle se situe nécessairement dans la partie supérieure du tube où elle a été introduite.



► Exploiter le caractère incompressible d'un liquide

L'eau et l'huile sont incompressibles donc leur volume se conserve. On exploite cette propriété pour obtenir des relations entre les altitudes z_A , z_B , z_C et z_D .

- On détermine la hauteur de la colonne d'huile en fonction du volume versé : $z_B - z_C = \frac{V_h}{s} = 2\text{cm}$.
- Le volume d'eau qui apparaît dans la partie droite du tube est identique au volume d'eau qui a quitté la partie gauche. Cela se traduit en équation sous la forme : $s(z_A - z_C) = s(z_D - z_A) \iff 2z_A = z_C + z_D$.

► Mettre en œuvre la loi du nivellement barométrique

On écrit la loi du nivellement barométrique dans l'huile, entre les points B et C. La pression au niveau de la surface libre B est égale à la pression atmosphérique.

$$P_C - P_{\text{atm}} = \rho_h g (z_B - z_C) = \frac{\rho_h g V_h}{s}$$

On écrit à nouveau la loi du nivellement barométrique, dans l'eau cette fois-ci entre les points C et D. La pression au niveau de la surface libre D est elle aussi égale à la pression atmosphérique.

$$P_C - P_{\text{atm}} = \rho_e g (z_D - z_C)$$

À partir de ces deux dernières relations on obtient que :

$$z_D - z_C = \frac{\rho_h V_h}{\rho_e s} = \frac{d_h V_h}{s}$$

où $d_h = \rho_h / \rho_e = 0,6$ est la densité de l'huile.

Enfin en utilisant $2z_A = z_C + z_D$ on peut isoler l'altitude de l'interface entre l'eau et l'huile :

$$z_C = z_A - \frac{d_h V_h}{2s} = 9,4 \text{ cm}$$

2. On détermine ensuite rapidement l'altitude de la surface libre de l'eau dans l'autre branche :

$$z_D = z_A + \frac{d_h V_h}{2s} = 10,6 \text{ cm}$$

Application 1 : TD : exercice 1.

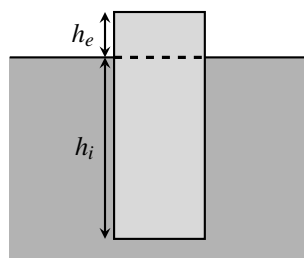
2 Poussée d'Archimède dans un liquide au repos

Situation : Un flotteur cylindrique de hauteur H et de section s est plongé dans de l'eau. On suppose que le flotteur est un solide homogène de densité $d = 0,8$ dont l'axe est aligné avec la verticale.

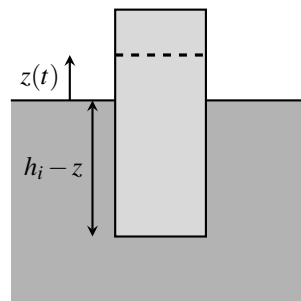
1. Déterminer la hauteur de la partie immergée du flotteur à l'équilibre.
2. On écarte légèrement le flotteur de sa position d'équilibre puis on le lâche. Déterminer la période des oscillations verticales en supposant que l'axe du flotteur reste en permanence aligné avec la verticale.

► Schématiser la situation

1.



flotteur en équilibre



flotteur hors équilibre

► Mettre en œuvre la loi d'Archimède

Le flotteur est soumis à son poids $\vec{P} = \rho_f s H \vec{g}$, à la poussée d'Archimède exercée par l'eau $\vec{\Pi}_{\text{eau}} = -\rho_e h_i s \vec{g}$ et à la poussée d'Archimède exercée par l'air $\vec{\Pi}_{\text{air}} = -\rho_a h_e s \vec{g}$. Par la suite on négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air comparé à celle exercée par l'eau, sachant que l'air est environ mille fois moins dense que l'eau. À l'équilibre mécanique du flotteur :

$$\rho_f s H g - \rho_e h_i s g = 0 \iff h_i = \frac{\rho_f}{\rho_e} H = dH$$

► Mettre en œuvre le principe fondamental de la dynamique

2. Hors équilibre on exprime la poussée d'Archimède exercée par l'eau sur le flotteur en fonction de son déplacement z par rapport à l'équilibre :

$$\vec{\Pi}_{\text{eau}} = -\rho_e (h_i - z) s \vec{g}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique au flotteur dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m_f \vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi}_{\text{eau}}$$

La masse du flotteur est $m_f = \rho_f H s$. On projette dans la direction $\vec{u}_z$ verticale ascendante :

$$\rho_f H s \ddot{z} = -\rho_f H s g + \rho_e (h_i - z) s g$$

On simplifie en utilisant le résultat de la question 1 :

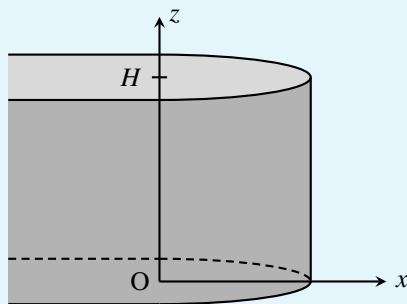
$$\rho_f H s \ddot{z} = -\rho_e z s g \iff \ddot{z} + \frac{g}{H d} z = 0$$

Le flotteur effectue des **oscillations harmoniques** de période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{H d}{g}}$.

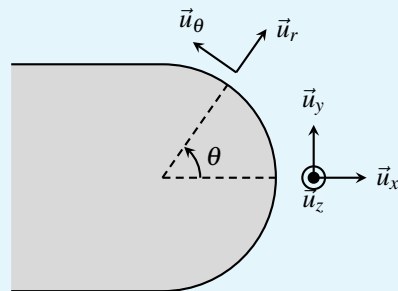
Application 2 : TD : exercice 2.

3 Force de pression exercée sur un barrage

Situation :



vue en perspective



vue de dessus

Un barrage hydroélectrique hémicylindrique de rayon R retient un volume d'eau de hauteur H . On assimile l'eau à un fluide incompressible homogène de masse volumique ρ . La pression de l'air extérieur est supposée uniforme et vaut P_0 . La position d'un point du barrage est repérée par ses coordonnées cylindriques (R, θ, z) avec l'origine de l'axe (Oz) située au fond du barrage.

1. Déterminer la loi de pression $P(z)$ dans le volume d'eau.
2. En raisonnant sur les symétries du problème déterminer sans calcul la direction de la force pressante s'exerçant sur l'intégralité du barrage.
3. Exprimer la résultante des forces de pression $d\vec{F}_p$ qui s'exerce sur un élément de surface $dS = R d\theta dz$ du barrage situé en un point quelconque de coordonnées (R, θ, z) . Déterminer la composante $dF_{p,x}$ de cette force élémentaire selon $\vec{u}_x$.
4. Exprimer la force de pression qui s'exerce sur le barrage entier par un calcul d'intégrale double sur la partie hémicylindrique.

► Intégrer la loi fondamentale de la statique des fluides

1. On écrit la loi fondamentale de la statique des fluides dans l'eau : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ (axe Oz ascendant). On intègre cette loi sachant que l'eau est supposée incompressible et homogène ($\rho = \text{Cste}$) :

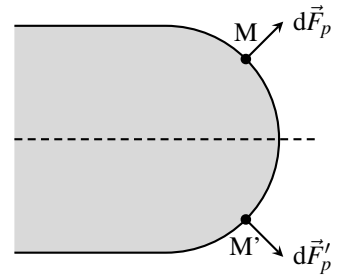
$$P(z) = -\rho g z + C$$

On détermine la constante d'intégration C avec la condition limite $P(H) = P_0$ et on aboutit à $P(z) = P_0 + \rho g (H - z)$.

► **Exploiter les symétries du problème**

2. Considérons deux points M et M' symétriques par rapport au plan (Oxz). Les forces de pression exercées sur des éléments de surface situés en M et M' sont elles-mêmes symétriques par rapport à (Oxz) (voir figure ci-contre). Par conséquent la force résultante $d\vec{F}_p + d\vec{F}'_p$ est dirigée selon $\vec{u}_x$ (les composantes selon $\vec{u}_y$ de ces deux forces élémentaires se compensent).

On conclut que **la force résultante qui s'exerce sur le barrage est dirigée selon $\vec{u}_x$** .



► **Calculer une force de pression**

L'élément de surface dS est soumis aux forces pressantes $P(z)dS\vec{u}_r$ exercée par l'eau côté intérieur et $-P_0dS\vec{u}_r$ exercée par l'air côté extérieur. La force résultante est donc :

$$d\vec{F}_p = (P(z) - P_0)dS\vec{u}_r \iff \boxed{d\vec{F}_p = \rho g(H - z)Rd\theta dz\vec{u}_r}$$

On projette le vecteur unitaire radial dans la base cartésienne : $\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y$. On en déduit que :

$$\boxed{dF_{p,x} = \rho g(H - z)R \cos\theta d\theta dz}$$

► **Intégrer sur une surface**

La force de pression totale qui s'exerce sur le barrage se calcule en sommant les forces élémentaires $dF_{p,x}$ sur toute la partie hémicylindrique du barrage :

$$F_{p,x} = \iint_{\text{barrage}} dF_{p,x}$$

Les bornes d'intégration sont $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ et $0 \leq z \leq H$.

$$\begin{aligned} F_{p,x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^H \rho g(H - z)R \cos\theta d\theta dz = \rho gR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^H (H - z)dz \\ &= \rho gR \left[\sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{(H - z)^2}{2} \right]_0^H \\ &= \rho gRH^2 \end{aligned}$$

La force de pression qui s'exerce sur le barrage vaut $\boxed{\vec{F}_p = \rho gRH^2\vec{u}_x}$.

Rq : Cette force est identique à ce que l'on aurait obtenu avec un barrage plan de hauteur H et de largeur $2R$ orthogonal à $\vec{u}_x$.

Application 3 : TD : exercice 3.

4 Gaz parfait en équilibre mécanique : modèle de l'atmosphère isotherme

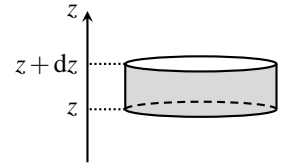
Situation : On se place dans le modèle de l'atmosphère isotherme de température $T_0 = 290$ K. L'altitude z est mesurée par rapport au niveau de la mer où la pression vaut $P_0 = 1,0$ bar. La composition de l'air ne varie pas avec l'altitude ; l'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g · mol⁻¹. On prendra $g = 9,8$ m · s⁻².

1. On considère une tranche d'air cylindrique de section S comprise entre les altitudes z et $z + dz$. En écrivant la condition d'équilibre mécanique de cet élément infinitésimal d'atmosphère montrer que $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.
2. Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ de l'atmosphère en fonction de l'altitude z . Mettre en évidence une altitude caractéristique H et faire l'application numérique.
3. L'air est constitué de 21% de dioxygène : calculer la pression partielle en dioxygène à l'altitude $z = 5,0$ km.
4. Il est couramment admis que l'air à la pression P_0 est "respirable" si sa teneur en dioxygène est au moins égale à 16%. En déduire la pression partielle minimale en dioxygène pour respirer confortablement et expliquer pourquoi la cabine d'un avion naviguant à 5000 m d'altitude doit être pressurisée.

► Établir la loi de la statique des fluides

1. La tranche d'air est soumise à son poids $\vec{P} = -\rho S dz g \vec{u}_z$ ainsi qu'à la résultante des forces de pression exercées par l'air environnant. Par symétrie ces forces se compensent dans un plan horizontal. Il reste les composantes verticales $-P(z+dz)S\vec{u}_z$ exercée sur la face supérieure et $P(z)S\vec{u}_z$ sur la face inférieure. On traduit l'équilibre mécanique de la tranche d'air :

$$-\rho S dz g - P(z+dz)S + P(z)S = 0 \iff \frac{P(z+dz) - P(z)}{dz} = -\rho g \iff \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$



► Intégrer la loi fondamentale dans le modèle de l'atmosphère isotherme

2. La loi des gaz parfaits permet d'établir une relation entre la masse volumique de l'air et sa pression : $\rho = \frac{PM}{RT_0}$. La loi fondamentale devient alors :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT_0} g \iff \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

On intègre cette équation différentielle par la méthode de **séparation des variables**, entre le sol ($z = 0, P = P_0$) et une altitude quelconque :

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz \iff \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mgz}{RT_0} \iff \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)}$$

Cette loi de pression peut s'écrire sous la forme $P(z) = P_0 \exp(-z/H)$ avec une altitude caractéristique de décroissance de la pression $\boxed{H = \frac{RT_0}{Mg} = 8,5 \text{ km}}$.

Rq : la séparation des variables est une alternative à la méthode d'intégration vue en cours (résolution classique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre). À l'occasion il peut être utile de l'utiliser.

► Calculer une pression partielle

3. La pression partielle en dioxygène à l'altitude z vaut $P_{O_2}(z) = y_{O_2} P(z)$ où $y_{O_2} = 0,21$ est la fraction molaire en dioxygène. À l'altitude $z = 5,0 \text{ km}$ on trouve numériquement $\boxed{P_{O_2} = 0,12 \text{ bar}}$.

4. La pression partielle minimale en dioxygène qui permet de respirer confortablement vaut $\boxed{p_{O_2, \min} = 0,16 \text{ bar}}$. À 5000 m d'altitude l'air extérieur n'a pas une pression suffisante pour permettre une respiration confortable, c'est pourquoi il est nécessaire de maintenir l'air de la cabine sous une pression supérieure à la pression extérieure.

Application 4 : On ne considère plus que la composition de l'air est indépendante de l'altitude. Pour simplifier on suppose que l'air est constitué uniquement de dioxygène et de diazote. Au niveau de la mer la pression atmosphérique est $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ et la fraction molaire en dioxygène est $x_0 = 0,210$.

1. Déterminer la pression partielle en dioxygène $P_{O_2}(z)$ et en diazote $P_{N_2}(z)$ à toute altitude, en fonction notamment de P_0 , x_0 et des masses molaires M_{O_2} et M_{N_2} . On rappelle que dans un mélange de gaz parfaits chaque gaz se comporte comme s'il était seul, c'est-à-dire que sa pression partielle s'identifie à la pression réellement mesurée si ce gaz était seul.
2. Déterminer la fraction molaire en dioxygène $x(z)$ à toute altitude et justifier qu'elle est décroissante. Calculer sa valeur pour $z = 5,0 \text{ km}$.

Application 5 : TD : exercice 6 (ultra classique!).

5 Un grand classique : décollage et vol d'un ballon atmosphérique

Situation : Une montgolfière permet de réaliser des vols de faible altitude en chauffant l'air contenu dans une enveloppe élastique. L'enveloppe, la nacelle et les passagers qu'elle contient ont une masse $m = 500\text{ kg}$. L'enveloppe a un volume $V = 2000\text{ m}^3$ que l'on suppose invariable au cours du vol. Un brûleur permet de maintenir la température de l'air contenu dans l'enveloppe à une valeur stationnaire T_1 supérieure à la température extérieure $T_0 = 280\text{ K}$, supposée uniforme dans toute l'atmosphère. L'ouverture à la base de l'enveloppe permet de garantir l'équilibre mécanique entre l'air à l'intérieur et à l'extérieur de l'enveloppe. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le champ de pesanteur terrestre $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est supposé uniforme. On note $P_0 = 1\text{ bar}$ la pression à l'altitude $z = 0$ du sol. La constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Déterminer la pression dans l'atmosphère à une altitude z quelconque. On introduira une altitude caractéristique H que l'on exprimera en fonction des données.
2. Déterminer littéralement et numériquement la température minimale T_m qu'il faut imposer dans la montgolfière pour qu'elle quitte le sol.
3. On impose une température $T_1 = 360\text{ K}$. Déterminer l'altitude à laquelle la montgolfière se stabilise, en fonction de H , T_0 , T_1 et T_m .

1. Voir cours : $P(z) = P_0 e^{-z/H}$ avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$.

► Établir la condition de décollage d'un ballon atmosphérique

2. De manière générale un ballon atmosphérique décolle dès lors que la poussée d'Archimède exercée par l'air environnant devient supérieure à son poids : $\|\vec{\Pi}_{\text{air}}\| > \|\vec{P}_{\text{ballon}}\|$. En vertu de la loi d'Archimède cela revient à dire que **la masse d'air déplacé doit être plus élevée que la masse du ballon**.

À RETENIR : la masse du ballon s'obtient en ajoutant la masse "solide" (nacelle, enveloppe, matériel, passagers, etc) et **la masse de gaz à l'intérieur de l'enveloppe** (qui n'est pas négligeable !). On peut donc écrire le critère de décollage sous la forme suivante :

$$\text{critère de décollage : } m_{\text{air déplacé}} > m_{\text{solide}} + m_{\text{gaz int}}$$

Pour que le décollage soit possible il faut obligatoirement que $m_{\text{gaz int}} < m_{\text{air déplacé}}$, c'est-à-dire que le gaz dans l'enveloppe soit **moins dense** que l'air extérieur, ce qui peut être réalisé avec de l'air plus chaud comme dans une montgolfière ou bien, sans chauffage, avec un gaz plus léger que l'air comme l'hélium.

On exprime d'abord la masse d'air déplacé. On néglige le volume occupé par la partie "solide" du ballon de sorte que le volume d'air déplacé par la montgolfière s'identifie au volume V de l'enveloppe. L'air déplacé est celui de l'atmosphère au niveau du sol, à la température T_0 et la pression P_0 . On peut donc écrire :

$$m_{\text{air déplacé}} = \rho_{\text{air}}(P_0, T_0)V = \frac{P_0 M}{RT_0} V$$

On exprime ensuite la masse d'air à l'intérieur de l'enveloppe. Elle est à la température T_1 et l'équilibre mécanique avec l'air extérieur fait qu'elle est à la même pression P_0 .

$$m_{\text{air int}} = \rho_{\text{air}}(P_0, T_1)V = \frac{P_0 M}{RT_1} V$$

On écrit enfin la condition vérifiée par T_1 pour permettre le décollage :

$$\begin{aligned} \frac{P_0 M}{RT_0} V > m + \frac{P_0 M}{RT_1} V &\iff \frac{P_0 M V}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) > m \\ &\iff \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_0} - \frac{mR}{P_0 M V} \\ &\iff T_1 > T_m = \frac{T_0}{1 - \frac{mRT_0}{P_0 M V}} = 350\text{ K} \end{aligned}$$

► Déterminer l'altitude de plafonnement d'un ballon atmosphérique

3. Quand un ballon s'élève dans l'atmosphère la densité de l'air extérieur diminue donc $m_{\text{air déplacé}}$ aussi. Selon les types de ballon (ballon à enveloppe ouverte ou fermée, ballon à air chaud ou à l'hélium) la masse de gaz interne peut rester constante ou bien diminuer au cours de l'ascension mais généralement $m_{\text{air déplacé}}$ décroît plus vite que $m_{\text{gaz int}}$ si bien que le ballon fini par atteindre une altitude pour laquelle la poussée d'Archimède et le poids du ballon se compensent exactement ; on dit que le ballon **plafonne**, ce qui se caractérise par :

$$m_{\text{air déplacé}} = m_{\text{solide}} + m_{\text{gaz int}}$$

Dans le cas présent l'air déplacé est à la température T_0 et la pression $P(z)$ tandis que l'air intérieur est à la température T_1 et la même pression $P(z)$:

$$\frac{P(z)M}{RT_0}V = m + \frac{P(z)M}{RT_1}V$$

D'après le résultat de la question précédente on a $m = \frac{P_0MV}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_m} \right)$. On peut donc simplifier l'expression précédente :

$$\frac{P(z)M}{RT_0}V = \frac{P_0MV}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_m} \right) + \frac{P(z)M}{RT_1}V \iff P(z) = \frac{\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_m}}{\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}} P_0 = \frac{T_m - T_0}{T_1 - T_0} \cdot \frac{T_1}{T_m} P_0$$

On détermine enfin l'altitude de plafonnement en utilisant le résultat de la question 1 :

$$e^{-z/H} = \frac{T_m - T_0}{T_1 - T_0} \cdot \frac{T_1}{T_m} \iff z = H \ln \left(\frac{T_1 - T_0}{T_m - T_0} \cdot \frac{T_m}{T_1} \right) = 835 \text{ m}$$

Application 6 : TD : exercice 5.

SOLUTIONS

Application 4

1. $P_{\text{O}_2}(z) = x_0 P_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{O}_2} g z}{RT_0}\right)$; $P_{\text{N}_2}(z) = (1 - x_0) P_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{N}_2} g z}{RT_0}\right)$

5. $x(z) = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0) \exp\left(\frac{(M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2}) g z}{RT_0}\right)}$; $x(z = 5000 \text{ m}) = 0,197$.