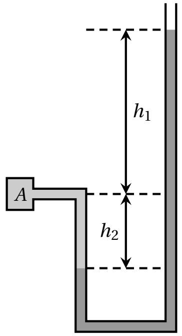
# TD22 : Statique des fluides

## ⋆ Exercice 1 : Manomètre à tube en U



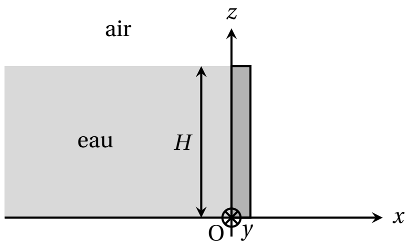

Le manomètre ci-contre est destiné à mesurer la pression de l'eau en $A$. La colonne de droite est remplie de mercure.
Calculer $P_A$ sachant que $h_1 = 0{,}30\,\mathrm{m}$, $h_2 = 0{,}20\,\mathrm{m}$.

*Données* : masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et du mercure : $\rho_m = 13{,}6.10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, pression atmosphérique : $P_0 = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$.

## ⋆ Exercice 2 : Statique d'une bille entre deux liquides

Une bille de masse volumique $\rho_b = 850\,\mathrm{kg \cdot\ m^{-3}}$ est immergée dans un récipient contenant de l'eau ($\rho_e = 1000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) et de l'huile ($\rho_h = 750\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) non miscibles.
Trouver la position d'équilibre de la bille. On calculera la fraction $x$ du volume immergée dans l'eau.

## ⋆⋆ Exercice 3 : Force pressante exercée sur un barrage

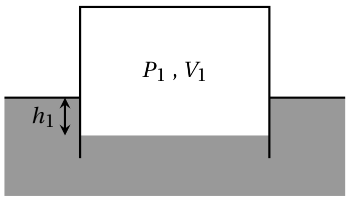



Un barrage hydroélectrique retient un volume d'eau de hauteur $H$ et de largeur $L$ (selon O$y$). On assimile l'eau à un fluide incompressible homogène de masse volumique $\rho = 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. La pression de l'air extérieur est supposée uniforme et vaut $P_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$. On prendra $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Calculer la loi de pression $P(z)$ dans le volume d'eau.
2. On considère un élément de surface $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ du barrage à la hauteur $z$. Calculer la force de pression résultante $\mathrm{d}\vec{F}$ exercée par l'eau d'un côté et l'air de l'autre, sur cet élément de surface.
3. Intégrer sur toute la surface du barrage et exprimer la force de pression totale $\vec{F}$ exercée sur le barrage. Calculer $\|\vec{F}\|$.

*Données* : $H = 100\,\mathrm{m}$, $L = 1\,\mathrm{km}$

## ⋆⋆ Exercice 4 : Cloche flottant sur l'eau




Une cloche cylindrique de masse $m$, dont l'épaisseur des parois est supposée négligeable, est plongée verticalement dans une cuve remplie d'eau. On désigne respectivement par $S$ et $H_0$ la section et la hauteur du cylindre, par $\rho$ la masse volumique de l'eau et par $p_0$ la pression atmosphérique extérieure.
La cloche s'enfonce dans le liquide en emprisonnant un volume d'air initial égal à son volume intérieur. Une fois plongé dans l'eau, l'air se comprime et occupe un volume $V_1$ à la pression $P_1$. La répartition de la masse de la cloche est telle que dans son état d'équilibre final, elle flotte en restant verticale.

On suppose qu'à tout instant l'air emprisonné sous la cloche est en équilibre thermique avec l'eau et l'atmosphère, à la température $T_0$. On négligera la masse volumique de l'air devant celle de l'eau et l'on supposera la pression de l'air (que l'on assimilera à un gaz parfait) uniforme à l'intérieur de la cloche.

1. Exprimer la pression $P_1$ de l'air emprisonné sous la cloche, son volume $V_1$ et la hauteur $h_1$ de la partie immergée de la cloche.
2. Une vanne située dans la partie supérieure de la cloche permet d'évacuer une quantité d'air suffisante pour que la cloche s'enfonce jusqu'à ce que la base du cylindre affleure juste à la surface de l'eau dans la cuve. Calculer la pression $P_2$ et le volume $V_2$ de l'air dans la cloche.

## ⋆⋆ Exercice 5 : Élevation d'un ballon-sonde dans l'atmosphère isotherme

Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer une charge dans les différentes couches de l'atmosphère. Les ballons météorologiques, embarquant du matériel de mesure, explorent par exemple toute la troposphère (couche la plus basse de l'atmosphère, d'une épaisseur d'environ 10 km) et la basse stratosphère. On se propose d'étudier ici une variante d'un ballon-sonde stratosphérique : le ballon ouvert à l'hélium. Dans cet exercice, l'atmosphère est supposée isotherme, de température $T_0 = 273\,\mathrm{K}$. La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Tous les gaz sont considérés comme parfaits et on négligera la force de frottement de l'air.

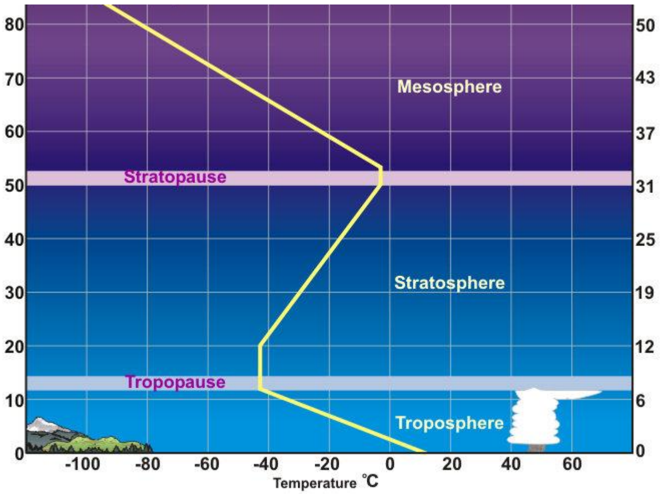
Le ballon-sonde est composé d'une enveloppe supposée sphérique, de volume $V = 100\,\mathrm{m^3}$ (correspondant à un diamètre de 6 m), **ouverte sur l'extérieur** par des manches d'évacuation situés à la base du ballon ainsi que d'une nacelle, contenant les appareils de mesure, le système de télécommunication et de positionnement GPS.

Dans ce type de ballon, l'enveloppe est indéformable et garde un volume $V$ constant. Le ballon étant ouvert à la base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium. On suppose que la température du ballon reste constante, égale à la température extérieure $T_0$. La masse $m$ de l'ensemble {enveloppe + nacelle} reste constante au cours du vol. Le volume du ballon est assimilé à celui de son enveloppe.

1. Déterminer la masse $m_{\mathrm{gaz}}$ de gaz contenu dans l'enveloppe au décollage.
2. Effectuer un bilan précis des forces s'exerçant sur le ballon au moment du décollage. En déduire une condition sur $m$ pour que le ballon décolle effectivement. On considère par la suite $m = 10\,\mathrm{kg}$.
3. Comment varie la quantité d'hélium dans l'enveloppe au cours de l'ascension ? Justifier.
4. Calculer l'altitude à laquelle le ballon-sonde plafonne.

*Données* : Masse molaire de l'hélium : $M_{\mathrm{He}} = 4{,}0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ , Masse molaire de l'air : $M_{\mathrm{air}} = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ , constante des gaz parfait : $R = 8{,}31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

## ⋆⋆ Exercice 6 : Modèle d'atmosphère non isotherme




Le modèle d'une atmosphère isotherme est simple mais très critiquable comme le montre le graphique ci-contre (image extraite du site internet du "météofrance" américain : http://www.weather.gov/). Dans la couche la plus basse de l'atmosphère, la troposphère, un meilleur modèle serait de considérer une évolution linéaire de $T$ avec l'altitude :

$$T(z) = T_0 - bz \qquad \text{avec } b > 0$$

1. Déterminer la nouvelle loi de pression $P(z)$ en faisant toujours l'hypothèse que l'air est un gaz parfait de masse molaire $M$.
2. Calculer l'écart relatif entre la valeur de pression au sommet de la troposphère ($z = 10\,\text{km}$) prédite par le modèle à gradient de température et le modèle d'atmosphère isotherme de température $T_0$. On prendra $T_0 = 280\,\text{K}$, $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $R = 8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $b = 6\,\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$.

## ⋆⋆ Exercice 7 : Masse de l'atmosphère

On se place dans le modèle de l'atmosphère isotherme de température $T_0 = 280\,\text{K}$. La pression au niveau de la mer ($z = 0$) est $P_0 = 1{,}0\,\text{bar}$. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Le champ de pesanteur $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est supposé uniforme.

1. Déterminer la pression $P(z)$ puis la masse volumique $\rho(z)$ de l'air à toute altitude $z$.
2. Exprimer la masse d'air infinitésimale $\mathrm{d}m$ contenue dans une tranche cylindrique de section $S$ située entre $z$ et $z + \mathrm{d}z$. En déduire la masse d'air totale contenue dans une colonne d'air cylindrique de section $S$, partant du sol et de hauteur infinie.
3. En négligeant l'effet dû à la courbure de la surface terrestre donner une estimation numérique de la masse totale de l'atmosphère terrestre.
   Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$.

## ⋆⋆⋆ Exercice 8 : Assis à la terrasse d'un café...

Vous êtes assis.e à la terrasse d'un café. C'est l'été, le soir tombe mais il fait encore chaud. Devant vous, un grand verre d'eau est rempli à ras bord, tandis qu'un glaçon flotte paresseusement à sa surface. Au son du chant des cigales, vous laissez vos pensées vagabonder librement, tandis que vous ressentez la caresse de la brise qui glisse sur votre peau. Soudain, un bruit sec vous sort de votre torpeur. Déjà plus d'une demi-heure que vous êtes plongé.e dans votre rêverie. Dans votre verre, le glaçon a fondu.

Le verre a-t-il débordé ?

Même question si l'on remplace le verre d'eau par un jus de mangue/papaye/goyave (vous aimez les fruits exotiques...) de densité légèrement supérieure à l'unité (le glaçon est toujours constitué d'eau pure).

## Solutions :

**Ex1** : $P_A = 1{,}65\,\text{bar}$ **Ex2** : $x = 0{,}4$

**Ex3** : 1. $P(z) = P_0 + \rho g(H - z)$ 3. $\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g L H^2 \vec{u}_x$ 4. $\|\vec{F}\| = 5.10^{10}\,\text{N}$

**Ex4** : 1. $h_1 = \frac{m}{\rho S}$, $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$, $V_1 = \frac{P_0 H_0 S^2}{P_0 S + mg}$ 2. $P_2 = P_0 + \frac{mg}{S}$, $V_2 = \frac{m}{\rho}$

**Ex5** : 1. $m_{\text{gaz}} = 18\,\text{kg}$ 2. $m < 110\,\text{kg}$ 4. $z_{\max} = 19\,\text{km}$

**Ex6** : 1. $P(z) = P_0\left(1 - \frac{bz}{T_0}\right)^{Mg/Rb}$ 2. $\frac{\Delta P}{P} = 14\%$

**Ex7** : 2. $m = \frac{P_0 S}{g}$ $M \simeq 5{,}3.10^{18}\,\text{kg}$