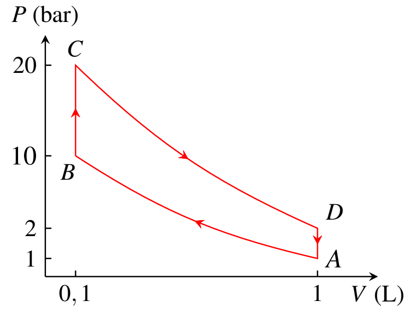
Corrigé DM26

<u>Exercice</u> : Moteur Stirling

1. On applique la loi des gaz parfaits dans l'état A pour trouver V_1 : $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = 1{,}0\,\text{L}$.
La transformation $A \to B$ est isotherme donc : $P_1V_1 = P_BV_2 \iff P_B = 10P_1 = 10\,\text{bar}$.
La transformation $B \to C$ est isochore donc : $\frac{P_B}{T_1} = \frac{P_C}{T_2} \iff P_C = 2P_B = 20\,\text{bar}$.
La transformation $C \to D$ est isotherme donc : $P_CV_2 = P_DV_1 \iff P_D = \frac{P_C}{10} = 2\,\text{bar}$.
Toutes les valeurs son rassemblées dans le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D
$P\,(\text{bar})$	1	10	20	2
$T\,(\text{K})$	300	300	600	600
$V\,(\text{L})$	$1{,}0$	$0{,}10$	$0{,}10$	$1{,}0$



2. On représente l'allure du cycle sur le diagramme de Watt ci-contre.

3. Le transfert thermique reçu du thermostat Σ_2 est $Q_c = Q_{BC} + Q_{CD}$.
On applique le premier principe pour $B \to C$ isochore : $Q_{BC} = C_V(T_2 - T_1)$.
On applique le premier principe pour $C \to D$ isotherme : $Q_{CD} = -W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$.

On conclut que $\boxed{Q_C = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = 709\,\text{J}}$.

4. Le rendement de ce moteur est défini par $\boxed{\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_c}}$. On calcule le travail reçu sur un cycle : $W_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{CD}$ (car $B \to C$ et $D \to A$ sont isochores). Les transformations $A \to B$ et $C \to D$ sont isothermes donc :

$$W_{\text{cycle}} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \implies -W_{\text{cycle}} = nR(T_2 - T_1) \ln \frac{V_1}{V_2} = 230\,\text{J}$$

Finalement on trouve numériquement : $\boxed{\eta = 0{,}324}$.
Le rendement maximal que l'on peut obtenir avec ces thermostats est donné par le théorème de Carnot : $\boxed{\eta_{\max} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0{,}5}$. Le rendement maximal n'est pas atteint car il y a **des sources d'irréversibilité**. En effet au cours de l'échauffement $B \to C$ et du refroidissement $D \to A$ il y a un transfert thermique entre deux corps de températures différentes, ce qui est irréversible.

5. On applique le second principe sur un cycle :

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{DA} + Q_{AB}}{T_1} + S_c$$

Par définition : $Q_{BC} + Q_{CD} = Q_c$.
On applique le premier principe sur un cycle :

$$W_{\text{cycle}} + Q_c + Q_{DA} + Q_{AB} = 0 \iff Q_{DA} + Q_{AB} = -W_{\text{cycle}} - Q_c = (\eta - 1)Q_c$$

Finalement on trouve : $\boxed{S_c = -\frac{Q_c}{T_2} + (1-\eta)\frac{Q_c}{T_1} = 0{,}42\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$. On trouve logiquement $S_c > 0$ puisque les transformations $B \to C$ et $D \to A$ sont irréversibles.

6. La puissance du moteur vaut $\mathscr{P} = \frac{-W_{\text{cycle}}}{\Delta t}$ avec Δt la durée d'un cycle. La fréquence des cycles est donnée par :

$$\boxed{f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\mathscr{P}}{-W_{\text{cycle}}} = 2{,}6 \cdot 10^3\,\text{cycles/min}}$$

7. Le transfert thermique récupéré au cours du refroidissement vaut : $Q_{\text{récup}} = -Q_{DA} = C_V(T_2 - T_1)$. Le procédé des frères Stirling permet "d'économiser" cette énergie, si bien que l'on peut considérer que, sur un cycle, l'énergie "dépensée" vaut $Q_c = Q_{BC} + Q_{CD} - Q_{\text{récup}} = Q_{CD}$. On note que l'énergie récupérée compense exactement celle qui permet le réchauffement $B \to C$ donc l'énergie dépensée sur un cycle correspond uniquement à Q_{CD}.

On calcule le nouveau rendement : $\eta = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{CD}}$ avec :

- $Q_{CD} = -W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$;
- $-W_{\text{cycle}} = nR(T_2 - T_1) \ln \frac{V_1}{V_2}$ (voir question 4).

On trouve finalement :

$$\eta = \frac{nR(T_2 - T_1)\ln \frac{V_1}{V_2}}{nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \implies \boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0{,}5}$$

Avec ce procédé **on atteint le rendement théorique maximal** ! Il y a bel et bien une amélioration des performances du moteur, on ne pouvait même pas faire mieux !