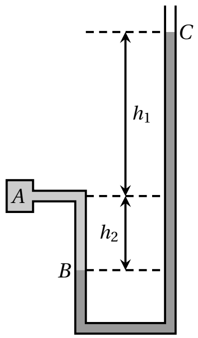
TD22 : Statique des fluides - corrigé

⋆ Exercice 1 : Manomètre à tube en U

On définit deux points B et C, respectivement au niveau de la surface libre eau/mercure et la surface libre mercure/air. L'eau est un fluide incompressible et homogène, ce qui permet d'appliquer la loi du nivellement barométrique entre A et B :

$$P_B - P_A = \rho_e g h_2$$



Le mercure est aussi un fluide incompressible et homogène, ce qui permet d'appliquer la loi du nivellement barométrique entre B et C :

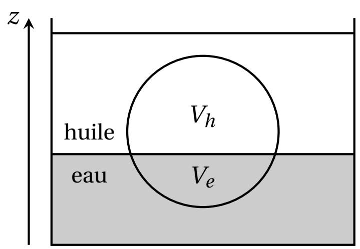
$$P_B - P_C = \rho_m g\,(h_1 + h_2)$$

Par continuité de la pression en C, $P_C = P_0$. Il vient que :

$$\boxed{P_A = P_0 + \rho_m g\,(h_1 + h_2) - \rho_e g h_2 = 1{,}6\ \text{bar}}$$

⋆ Exercice 2 : Statique d'une bille entre deux liquides

La bille est plus dense que l'huile et moins dense que l'eau. Elle ne peut donc se trouver qu'au niveau de la surface libre qui sépare ces deux liquides. On représente schématiquement la situation :



On note V_h le volume de la bille immergé dans l'huile, V_e le volume immergé dans l'eau et $V = V_h + V_e$ le volume total de la bille. Pour étudier l'équilibre mécanique de la bille, on applique le PFD. La bille est soumise à son poids ainsi qu'aux poussées d'Archimède exercée par l'huile et l'eau :

$$\overrightarrow{P} + \vec{\Pi}_{\text{eau}} + \vec{\Pi}_{\text{huile}} = \overrightarrow{0}$$

On applique la loi d'Archimède et on projette le PFD sur un axe (Oz) vertical ascendant :

$$-\rho_b V g + \rho_e V_e g + \rho_h V_h g = 0 \iff \rho_b V = \rho_e V_e + \rho_h V_h$$

Par définition, la fraction volumique du volume de la bille immergée dans l'eau vaut : $x = \frac{V_e}{V}$. On démontre alors rapidement que $1 - x = \frac{V_h}{V}$. En divisant l'équation ci-dessus par le volume total V, on obtient la relation suivante :

$$\rho_b = \rho_e x + \rho_h\,(1 - x) \iff \boxed{x = \frac{\rho_b - \rho_h}{\rho_e - \rho_h} = 0{,}4}$$

⋆⋆ Exercice 3 : Force pressante exercée sur un barrage

1. L'eau est un fluide incompressible et homogène donc la pression vérifie la loi du nivellement barométrique : $P(z) = -\rho g z + \text{Cste}$. On détermine la constante d'intégration en écrivant la condition limite $P(z = H) = P_0$. On montre alors que le champ de pression s'écrit :

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g(H - z)}$$

2. La force de pression exercée par l'air est $P(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{u}_x$ et celle exercée par l'air $-P_0\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{u}_x$. La force résultant vaut :

$$\mathrm{d}\vec{F} = (P(z) - P_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{u}_x \iff \boxed{\mathrm{d}\vec{F} = \rho g(H - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{u}_x}$$

3. On effectue un calcul d'intégrale double pour déterminer la force de pression résultante :

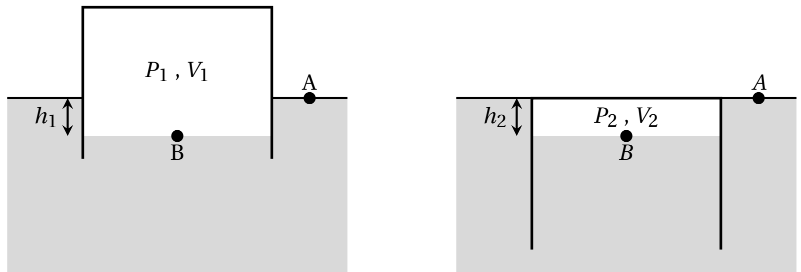
$$\vec{F} = \int_0^L \int_0^H \rho g(H - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{u}_x = \left(\int_0^L \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^H [\rho g(H - z)]\,\mathrm{d}z\right)\vec{u}_x$$

On calcule les intégrales :

$$\vec{F} = \rho g L\left[-\frac{(H - z)^2}{2}\right]_0^H \vec{u}_x \iff \boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g L H^2\,\vec{u}_x}$$

La norme de cette force vaut $\boxed{\|\vec{F}\| = \frac{1}{2}\rho g L H^2 = 5\cdot 10^{10}\,\text{N}}$.

⋆⋆ Exercice 4 : Cloche flottant sur l'eau



1. Il y a trois inconnues à déterminer : P_1, V_1 et h_1. Il s'agit d'écrire trois relations entre ces grandeurs :

- on traduit l'équilibre mécanique de la cloche. Celle-ci est soumise à son poids et aux forces de pressions exercées par l'air et l'eau sur ses parois. Par symétrie, les forces de pression qui s'exercent sur les parois latérales de la cloche se compensent les unes les autres. La résultante de ces forces de pression s'identifie aux forces que l'air interne et l'air atmosphérique exercent sur la paroi supérieure. D'après le PFD appliqué à la cloche en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$P_1 S - P_0 S - mg = 0 \;\;(1) \iff \boxed{P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}}$$

- on traduit l'équilibre mécanique de l'eau : On relie les pressions aux points A et B avec la loi du nivellement barométrique. Par continuité de la pression à la traversée d'une surface libre : $P_A = P_0$ et $P_B = P_1$.

$$P_1 - P_0 = \rho g h_1 \ \ (2) \iff \boxed{h_1 = \frac{m}{\rho S}}$$

- L'air interne est un gaz parfait. Au cours de sa compression, sa quantité de matière et sa température se conservent et son volume passe de $V_0 = H_0 S$ à V_1 :

$$P_0 H_0 S = P_1 V_1 \ \ (3) \iff \boxed{V_1 = \frac{H_0 S}{1 + \frac{mg}{P_0 S}}}$$

2. On applique à nouveau le PFD à la cloche en équilibre :

$$P_2 S - P_0 S - mg = 0 \iff \boxed{P_2 = P_0 + \frac{mg}{S}}$$

La pression interne n'est pas modifiée. Autrement dit, lorsque l'on ouvre la vanne, l'air interne s'échappe et le gaz restant dans la cloche se détend **à pression constante**. Pour déterminer le volume V_2, on applique à nouveau la loi du nivellement barométrique entre A et B (voir schéma ci-dessus) :

$$P_2 - P_0 = \rho g h_2 \iff h_2 = h_1 = \frac{m}{\rho S}$$

On reconnaît sur le schéma que le volume du gaz vaut : $\boxed{V_2 = h_2 S = \frac{m}{\rho}}$.

⋆⋆ Exercice 5 : Élevation d'un ballon-sonde dans l'atmosphère isotherme

1. Au décollage, l'enveloppe contient un volume V d'hélium, à la pression P_0 et la température T_0. D'après la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{m_{\text{gaz}} = M_{\text{He}} n_{\text{He}} = \frac{P_0 V M_{\text{He}}}{R T_0} = 18\,\text{kg}}$$

2. Avant de décoller, le ballon est soumis à son poids $\vec{P}$, à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_{\text{air}}$ exercée par l'air atmosphérique et à la réaction du sol. Le ballon décolle lorsque la réaction s'annule, c'est-à-dire à partir du moment où $\boxed{\|\vec{\Pi}_{\text{air}}\| > \|\vec{P}\|}$.

Le poids du ballon est égal à $\vec{P} = m_{\text{ballon}} \vec{g}$, où m_{ballon} est **la masse totale du ballon**, c'est-à-dire **la masse de l'enveloppe, de la nacelle (avec les appareils de mesure) mais aussi de l'hélium interne**.

La poussée d'Archimède est égale à $\vec{\Pi}_{\text{air}} = -m_{\text{déplacé}} \vec{g}$ où $m_{\text{deplacé}}$ est **la masse d'air déplacée**. Finalement, la condition de décollage du ballon peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{m_{\text{deplacé}} > m_{\text{ballon}} = m + m_{\text{gaz}}}$$

À la surface, la pression de l'air atmosphérique vaut P_0 et sa température T_0. On en déduit que :

$$m_{\text{deplacé}} = \frac{P_0 V M_{\text{air}}}{R T_0}$$

La masse totale du ballon vaut :

$$m_{\text{ballon}} = m + m_{\text{gaz}} = m + \frac{P_0 V M_{\text{He}}}{R T_0}$$

Le ballon décolle à condition que la masse m respecte l'inégalité suivante :

$$\frac{P_0 V M_{\text{air}}}{R T_0} > m + \frac{P_0 V M_{\text{He}}}{R T_0} \iff \boxed{m < m_{\max} = \frac{P_0 V (M_{\text{air}} - M_{\text{He}})}{R T_0} = 1,1 \cdot 10^2\,\text{kg}}$$

3. Au cours de l'ascension, la pression atmosphérique décroît, à température constante. Comme le ballon est ouvert, la pression de l'hélium interne reste à tout instant égale à la pression atmosphérique et décroît elle aussi.
Puisque le volume du ballon est fixé, que la température de l'hélium reste constante et que sa pression diminue, cela signifie que la quantité de matière en hélium à l'intérieur du ballon diminue également ($n = \frac{PV}{RT_0}$).
On conclut qu'au cours de l'ascension, **l'hélium interne quitte progressivement l'enveloppe par les manches d'évacuation pour maintenir l'équilibre des pressions entre l'intérieur et l'extérieur du ballon**, à une valeur de plus en plus faible à mesure que le ballon s'élève.

4. Le ballon-sonde plafonne s'il se trouve en équilibre mécanique, c'est-à-dire si :

$$\boxed{\|\vec{\Pi}_{\text{air}}\| = \|\vec{P}\| \iff m_{\text{deplacé}} = m_{\text{ballon}}}$$

À une altitude z quelconque :

$$m_{\text{deplacé}} = \frac{P(z) V M_{\text{air}}}{R T_0} \quad \text{et} \quad m_{\text{ballon}} = m + \frac{P(z) V M_{\text{He}}}{R T_0}$$

avec $P(z) = P_0 \mathrm{e}^{-z/H}$ est la pression à l'altitude z ($H = \frac{R T_0}{M_{\text{air}} g}$).

La ballon-sonde plafonne à condition que :

$$\frac{V M_{\text{air}}}{R T_0} P_0 e^{-\frac{z_{\max}}{H}} = m + \frac{V M_{\text{He}}}{R T_0} P_0 e^{-\frac{z_{\max}}{H}} \iff \boxed{z_{\max} = H \ln\left(\frac{P_0 V (M_{\text{air}} - M_{\text{He}})}{m R T_0}\right) = 19\,\text{km}}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Modèle d'atmosphère non isotherme

1. On reprend la démonstration faite en cours. L'équation différentielle vérifiée par $P(z)$ est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{PM}{RT} g = -\frac{PMg}{R(T_0 - bz)}$$

C'est à partir d'ici que le calcul diffère de celui de l'atmosphère isotherme. Pour intégrer cette équation différentielle il faut tenir compte du fait que la température dépend de l'altitude. Pour cela, nous allons privilégier la méthode de l'intégration **par séparation des variables** :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{R(T_0 - bz)} \mathrm{d}z$$

On intègre entre le sol ($z = 0$, $P = P_0$) et un point d'altitude quelconque (z, P).

$$\int_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}P}{P} = \int_0^z -\frac{Mg}{R(T_0-bz)}\mathrm{d}z \iff [\ln P]_{P_0}^{P} = \left[\frac{Mg}{Rb}\ln(T_0-bz)\right]_0^z \iff \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{Mg}{Rb}\ln\left(\frac{T_0-bz}{T_0}\right)$$

Après simplification et passage à l'exponentielle, on aboutit à l'expression suivante :

$$\boxed{P(z) = P_0\left(1-\frac{bz}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rb}}}$$

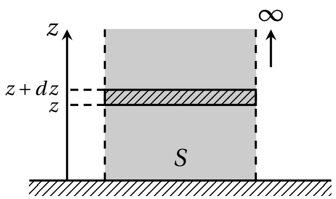
2. Dans le modèle à gradient de température la pression au sommet de la troposphère vaut $P_{\text{grad}}(10\,\text{km}) = 25,3\,\text{kPa}$. Dans le modèle de l'atmosphère isotherme on a vu que $P(z) = P_0\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$. La valeur au sommet de la troposphère est $P_{\text{isoT}}(10\,\text{km}) = 29,5\,\text{kPa}$. L'écart relatif entre les deux modèles vaut :

$$\boxed{\frac{P_{\text{isoT}}(10\,\text{km}) - P_{\text{grad}}(10\,\text{km})}{P_{\text{isoT}}(10\,\text{km})} = 14\%}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Masse de l'atmosphère

1. Voir cours :

$$\boxed{P(z) = P_0\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT_0} = \frac{P_0M}{RT_0}\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)}$$



2. La masse contenue dans la tranche d'air cylindrique infinitésimale vaut $\boxed{\mathrm{d}m = \rho(z)S\mathrm{d}z}$.
Pour déterminer la masse totale de la colonne on intègre entre $z = 0$ et $z = \infty$:

$$m = \int_0^{\infty} \frac{M}{RT}SP_0\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)\mathrm{d}z = \frac{P_0SM}{RT}\left[-\frac{RT_0}{Mg}\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{P_0SM}{RT_0}\times\frac{RT_0}{Mg} \iff \boxed{m = \frac{P_0S}{g}}$$

Pour déterminer la masse totale de l'atmosphère, on généralise ce résultat en prenant comme valeur de S la surface totale de la Terre. Évidemment, il s'agit d'une approximation puisque la surface du sol n'est en réalité pas plane. Cela nous permet néanmoins d'obtenir un ordre de grandeur.

$$\boxed{m = \frac{P_0}{g}\cdot 4\pi R_T^2 = 5,3\cdot 10^{18}\,\text{kg}}$$

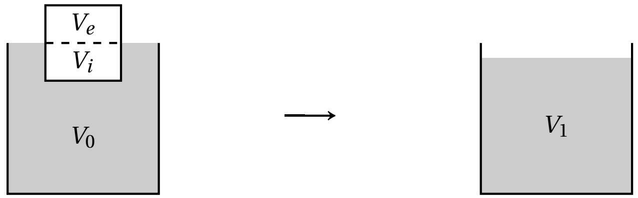
On peut trouver dans la littérature une valeur à laquelle comparer notre résultat (source : Kevin E. Trenberth and Lesley Smith, *The mass of the atmosphere : a constraint on global analysis*)

$$\boxed{\text{the dry air mass is estimated as } 5.1352 \pm 0.0003\times 10^{18}\,\text{kg}}$$

En conclusion la valeur que nous avons obtenue est très satisfaisante si l'on considère toutes les approximations que l'on a réalisé pour l'obtenir!

⋆⋆⋆ Exercice 8 : Assis à la terrasse d'un café...

On commence par le glaçon d'eau pure plongé dans l'eau pure. On représente schématiquement la situation initiale et la situation finale.



Dans l'état initial, on note V_e le volume émergé du glaçon, V_i le volume immergé dans l'eau liquide et $V_g = V_i + V_e$ le volume total du glaçon. On note V_0 le volume d'eau liquide et V le volume total du verre. Dans l'état final, on note V_1 le volume d'eau liquide.

Dans ce problème, on notera ρ_ℓ la masse volumique de l'eau liquide et ρ_g celle de la glace. On se rappelle que $\rho_g < \rho_\ell$, raison pour laquelle le glaçon flotte à la surface de l'eau liquide.

Pour répondre à la question posée, nous allons déterminer V_1. Si $V_1 > V$, l'eau déborde, sinon elle ne déborde pas.

Dans un premier temps, on détermine V_0. Puisque le verre est rempli à ras-bord, alors $V_0 = V - V_i$. On a vu en exercice d'application la manière de déterminer V_i (PFD appliqué au glaçon). je vous renvoie vers le cours pour la démo, le résultat est le suivant :

$$V_i = \frac{\rho_g}{\rho_\ell}V_g \iff V_0 = V - \frac{\rho_g}{\rho_\ell}V_g$$

Pour déterminer V_1, on rajoute à V_0 le volume du glaçon **fondu**. Pour déterminer ce volume V_{gf}, on utilise la conservation de la masse du glaçon au cours de sa fusion :

$$\rho_g V_g = \rho_\ell V_{gf} \iff V_{gf} = \frac{\rho_g}{\rho_\ell}V_g$$

Finalement, le volume total de l'eau liquide, une fois le glaçon fondu, vaut :

$$\boxed{V_1 = V_0 + V_{gf} = V}$$

Dans l'état final, l'eau liquide occupe exactement l'intégralité du volume du verre, celui-ci est encore rempli à ras-bord, $\boxed{\text{le verre n'a pas débordé!}}$.

Quand elle passe à l'état liquide, l'eau du glaçon devient plus dense. On vient de démontrer dans cet exercice que son volume **diminue exactement de V_e**, raison pour laquelle l'eau reste à ras-bord lorsque le glaçon a fondu.

Passons maintenant au cas où un glaçon d'eau pure est plongé dans un verre rempli d'un liquide de masse volumique $\rho_{\text{jus}} > \rho_\ell$. On conserve la relation $V_0 - V - V_i$, mais désormais, l'équilibre mécanique de glaçon implique que :

$$V_i = \frac{\rho_g}{\rho_{\text{jus}}} V_g \iff V_0 = V - \frac{\rho_g}{\rho_{\text{jus}}} V_g$$

Le volume du glaçon fondu est, lui, le même dans les deux expériences :

$$V_{gf} = \frac{\rho_g}{\rho_\ell} V_g \iff \boxed{V_1 = V_0 + V_{gf} = V + \rho_g V_g \underbrace{\left(\frac{1}{\rho_\ell} - \frac{1}{\rho_{\text{jus}}}\right)}_{>0}}$$

Puisque $\rho_{\text{jus}} > \rho_\ell$ alors $V_1 > V$. $\boxed{\text{Le verre déborde! (un tout petit peu...)}}$