Chapitre 19

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie non nulle.

I Matrice d'une application linéaire

1 Définition

Définition 1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. La* **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**, *notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dont la j^e colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$, cela pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c c} f(e_1) \ldots f(e_p) & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} /f_1 \\ \vdots \\ /f_n \end{array} \end{array}$$

Ainsi :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, p\},\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

Exemples :

1) Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + 5z, 3x + 4y - 2z)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 3) = 2f_1 + 3f_2$, $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 4) = -f_1 + 4f_2$ et $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (5, -2) = 5f_1 - 2f_2$, donc la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Soit l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP - X^2P' + P''$. Soient $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

On a $f(1) = X$, $f(X) = X^2 - X^2 = 0$ et $f(X^2) = -X^3 + 2$, donc la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 2 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit f un endomorphisme de E. La* **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$**, *notée $M_{\mathcal{B}}(f)$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont la j^e colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$, cela pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c c} f(e_1) \ldots f(e_n) & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} /e_1 \\ \vdots \\ /e_n \end{array} \end{array}$$

Autrement dit, $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$: on prend la même base au départ et à l'arrivée.

Par exemple, la matrice de l'application identité dans n'importe quelle base est la matrice identité. Plus généralement, la matrice d'une homothétie $x \mapsto \lambda x$ est la matrice scalaire λI.

Autre exemple : soit r la rotation vectorielle d'angle θ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On a $r(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $r(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$) donc la matrice de r dans la base canonique est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 1 Déterminer la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme de $K_2[X]$ $\varphi : P \mapsto XP' - P(0)X^2$.

2 Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Proposition 1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Alors l'application $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par $\varphi(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme.*

Autrement dit, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et pour tous $\alpha, \beta \in K$ on a :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\alpha f + \beta g) = \alpha M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \beta M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$$

et la bijectivité de φ signifie que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.

Démonstration :

Montrons d'abord que φ est linéaire.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$. En effet, la j^e colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g)$ est constituée des coordonnées de $(f+g)(e_j)$ dans $\mathcal{C}$. Or $(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j)$, donc cette colonne est la somme des j^e colonnes de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$.

De même, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\alpha \in K$, alors, pour tout j, la j^e colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\alpha f)$ est le produit de la j^e colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ par α car $f(\alpha e_j) = \alpha f(e_j)$. Par conséquent $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\alpha f) = \alpha M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Montrons maintenant que φ est bijective. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. D'après la proposition 20 du chapitre 16, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, ce qui signifie exactement que $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$. □

En particulier, si $E = K^p$ et $F = K^n$ et que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de K^p et K^n, alors l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{L}(K^p, K^n) \to \mathcal{M}_{n,p}(K)$ défini par $\varphi(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est appelé **isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(K^p, K^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$**. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, l'unique application linéaire $f : K^p \to K^n$ telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$ est appelée **application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à** A.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, alors l'application linéaire de K^2 dans K^3 canoniquement associée à A est définie par $f(x,y) = (2x+4y, x+5y, 3x+6y)$.

Corollaire 2 *L'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(K)$ définie par $\varphi(f) = M_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme.*

En particulier, si $E = K^n$ et que $\mathcal{B}$ est la base canonique de K^n, alors φ est appelé **isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(K^n)$ dans $\mathcal{M}_n(K)$**. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, l'unique endomorphisme f de K^n tel que $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ est appelé **endomorphisme de K^n canoniquement associé à** A.

Corollaire 3 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension finie $n \times p$.*

En particulier, si E est de dimension n, alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2.

3 Matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Définition 3 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in E$. La* **matrice de x dans la base** $\mathcal{B}$ *est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On la note $M_{\mathcal{B}}(x)$.*

Proposition 4 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire et soit $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Soient $x \in E$ de matrice X dans $\mathcal{B}$ et $y \in F$ de matrice Y dans $\mathcal{C}$. Alors :*

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX.$$

On a donc $M_{\mathcal{C}}(f(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(x)$.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ on a donc $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$.

Alors $f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i\right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) f_i.$

La matrice de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$ est donc $Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$, et le produit AX donne la même matrice. $\square$

4 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Proposition 5 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G. Soient $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications linéaires. Alors :*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(f) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

Démonstration :

Soient q, p et n les dimensions respectives de E, F et G. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_n)$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, soit $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}$ la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et soit $C = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}$ la matrice de $f \circ g$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. On veut montrer que $C = AB$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a $f(f_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g_i$ et pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, on a $g(e_k) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk} f_j$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, on a donc $(f \circ g)(e_k) = f(g(e_k)) = f\left(\sum_{j=1}^{p} b_{jk} f_j\right) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk} f(f_j) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} g_i\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{jk} g_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} g_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}\right) g_i$.

Par unicité des coordonnées dans la base $\mathcal{D}$, on en déduit que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$. $\square$

Corollaire 6 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors :*

$$M_{\mathcal{B}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(g).$$

5 Matrices inversibles et isomorphismes

Proposition 7 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{C}$ une base de F. Soit f une application linéaire de E dans F et soit $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors A est inversible si et seulement si f est bijective, et dans ce cas $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.*

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que A est inversible. Soit g l'unique application linéaire de F dans E telle que $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. On a $\begin{cases} A \times A^{-1} = I_n \\ A^{-1} \times A = I_n \end{cases}$, donc $\begin{cases} f \circ g = \mathrm{Id}_F \\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \end{cases}$. Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = g$.

($\Leftarrow$) Supposons que f est bijective. Soit $B = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})$. On a $\begin{cases} f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \end{cases}$, donc $\begin{cases} A \times B = I_n \\ B \times A = I_n \end{cases}$. Par conséquent A est inversible et $A^{-1} = B$. $\square$

Corollaire 8 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E et soit A sa matrice dans $\mathcal{B}$. Alors A est inversible si et seulement si f est bijectif, et dans ce cas $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.*

Autrement dit :

$$f \in GL(E) \Leftrightarrow A \in GL_n(K).$$

Proposition 9 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) A est inversible.

(ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A \times B = I_n$.

(iii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $B \times A = I_n$.

Démonstration :

Par définition, (i) implique (ii) et (iii).

Montrons que (ii) implique (i). Soient f et g les endomorphismes de K^n canoniquement associés à A et B. On a donc $f \circ g = \mathrm{Id}_{K^n}$. Cela implique que f est surjective : pour tout $y \in K^n$ on a $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, donc $\mathrm{Im}\, f = K^n$. Or K^n est de dimension finie, donc la surjectivité de f implique sa bijectivité, et donc l'inversibilité de A.

Montrons que (*iii*) implique (*i*). Soient f et g les endomorphismes de K^n canoniquement associés à A et B. On a donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{K^n}$. Cela implique que f est injective : pour tout $x \in \operatorname{Ker} f$ on a $x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$, donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Or K^n est de dimension finie, donc l'injectivité de f implique sa bijectivité, et donc l'inversibilité de A. □

II Noyau, image et rang d'une matrice

1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 4 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. La* **matrice de $\mathcal{F}$ dans** *$\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dont la j^e colonne est constituée des coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$. On la note $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.*

Exemples :

1) Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soient $u = (3, 2, 7)$, $v = (4, -1, 3)$ et $w = (8, 0, 2)$. La matrice de la famille (u, v, w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soient $P_1 = 4X^2 - 2X + 3$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = 12$ et $P_4 = X - 2$. La matrice de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 12 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.*

(i) Le **noyau de** *A est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ tels que $AX = 0$. On le note* $\operatorname{Ker} A$.

(ii) **L'image de** *A est le sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ engendré par la famille de ses vecteurs colonnes. On la note* $\operatorname{Im} A$.

(iii) Le **rang de** *A est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. On le note* $\operatorname{rg} A$.

Proposition 10 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors* $\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = p$.

Démonstration :

Soit f l'application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à A. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de K^p et de K^n. Alors l'application $x \mapsto M_{\mathcal{B}}(x)$ induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker} f$ dans $\operatorname{Ker} A$: la linéarité et l'injectivité sont immédiates, et la surjectivité vient de l'équivalence

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X \in \operatorname{Ker} A$$

où $x \in K^p$ et $X = M_{\mathcal{B}}(x)$. De même l'application $y \mapsto M_{\mathcal{C}}(y)$ induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Im} A$: la linéarité et l'injectivité sont immédiates, et la surjectivité vient du fait que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ et les vecteurs colonnes de A sont $M_{\mathcal{C}}(f(e_1)), \dots, M_{\mathcal{C}}(f(e_p))$.

On en déduit que $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Ker} A)$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} A)$. Le théorème du rang appliqué à f permet de conclure. □

Remarque : En pratique, si f est l'application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à A, on identifiera généralement $\mathcal{M}_{p,1}(K)$ avec K^p (et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ avec K^n), donc on identifiera $\operatorname{Ker} A$ avec $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} A$ avec $\operatorname{Im} f$.

Exercice 2 Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 13 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Corollaire 11 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors* $\operatorname{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

Démonstration :

Soit f l'application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à A. On a vu au chapitre 16 que $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim K^p, \dim K^n) = \min(n, p)$, donc $\operatorname{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$. □

Corollaire 12 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors A est inversible si et seulement si* $\operatorname{rg}(A) = n$.

Démonstration :

Soit f l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A. On a vu au chapitre 16 que f est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim K^n = n$, donc A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$. □

Corollaire 13 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Alors :*

(i) $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.

(ii) Si A est inversible, alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.

(iii) Si B est inversible, alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration : C'est la traduction matricielle de la proposition 27 du chapitre 16. □

Proposition 14 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{C}$ une base de F. Soit f une application linéaire de E dans F de matrice A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors le rang de f est égal au rang de A.*

Démonstration :

Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$. Soit $\varphi : K^p \to E$ et $\psi : K^n \to F$ les applications linéaires qui envoient les bases canoniques respectives de K^p et K^n sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Ce sont donc des isomorphismes, et on vérifie facilement que l'application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à A est $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Par conséquent, $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \mathrm{rg}\, f$ d'après la proposition précédente. □

3 Calcul du rang d'une matrice

Définition 6 *Une matrice est* **échelonnée par lignes** *si :*

– si une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi,

– à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche (le **pivot***) est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & \mathbf{4} & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes. Les pivots sont en gras.

Proposition 15

(i) Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

(ii) Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes et au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

(iii) Le rang d'une matrice échelonnée par lignes est égal au nombre de ses lignes non nulles, i.e au nombre de ses pivots.

(iv) On ne change pas le rang d'une matrice :

(a) en échangeant deux de ses lignes ou deux de ses colonnes,

(b) en multipliant une de ses lignes ou une de ses colonnes par un scalaire non nul,

(c) en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

Démonstration :

(i) Soit A une matrice de taille (n,p). Soient $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A et F le sous-espace de K^n qu'elles engendrent.

Supposons que A est de rang r. Il existe donc une famille $\mathcal{C} = (C_{i_1}, \ldots, C_{i_r})$ de colonnes de A qui forment une base de F. Notons M la matrice de taille (n,r) dont les colonnes sont $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$ et notons N la matrice de taille (r,p) dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $C_1, \ldots, C_p$ dans la base $\mathcal{C}$. On a ainsi $A = MN$.

Mais alors $A^T = N^T M^T$, et donc, d'après les corollaires 13 et 11, $\mathrm{rg}\, A^T \leqslant \min(\mathrm{rg}\, N^T, \mathrm{rg}\, M^T) \leqslant r = \mathrm{rg}\, A$.

En appliquant ce qu'on vient de démontrer à A^T, on obtient $\mathrm{rg}\, A \leqslant \mathrm{rg}\, A^T$, et le résultat s'ensuit.

(ii) Conséquence immédiate du (i).

(iii) D'après le (ii), le rang de la matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes, qui est égal au nombre de lignes non nulles car celles-ci sont linéairement indépendantes.

(iv) On a vu au chapitre 10 qu'appliquer ces opérations élémentaires à une matrice revient à la multiplier à gauche ou à droite par une matrice de transposition, de dilatation ou de transvection. Or ces matrices sont inversibles, donc d'après le corollaire 13 cela ne modifie pas le rang de la matrice. □

La méthode pratique de calcul du rang d'une matrice consiste donc à appliquer les opérations élémentaires (sur les lignes et/ou les colonnes) jusqu'à l'obtention d'une matrice échelonnée.

Exercice 3 Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 8 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Déterminer, en fonction des réels a, b, c, le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

4 Application aux systèmes linéaires

On a vu au chapitre 10 qu'un système linéaire de n équations à p inconnues

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Définition 7 *On appelle* **rang** *de* (Σ) *le rang de la matrice* A.

On déduit immédiatement des résultats des paragraphes précédents et du théorème du rang la proposition suivante :

Proposition 16 *Avec les notations précédentes :*

(i) L'ensemble des solutions du système homogène associé à (Σ) *est le noyau de* A. *Sa dimension est* $p - r$ *où* r *est le rang de* (Σ).

(ii) Le système (Σ) *est compatible si et seulement si* B *appartient à l'image de* A.

(iii) Si $n = p$ *et que* A *est inversible, alors* (Σ) *a une solution unique* $X = A^{-1}B$. *On dit alors que* (Σ) *est un* **système de Cramer**.

III Changement de base

On s'intéresse dans ce paragraphe aux problèmes suivants :

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Soit X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ et soit X' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre X et X' ?

2) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et soit M' sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Quelle relation y a-t-il entre M et M' ?

1 Matrices de passage

Définition 8 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie. Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E. *La* **matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **à** $\mathcal{B}'$ *est la matrice de* $\mathcal{B}'$ *dans* $\mathcal{B}$. *On la note* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Les colonnes de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ sont donc formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples :

1) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (2, -1)$ et $f_2 = (1, 3)$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E et soit $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = 1$, $P_2 = 1+X$ et $P_3 = 1-X^2$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de E (libre et de cardinal égal à $\dim E$), et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 17 $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est inversible et* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Démonstration :

On remarque que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$. Or Id_E est bijective, donc $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. □

2 Formule de changement de base pour les vecteurs

Proposition 18 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Soit x un vecteur de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et de matrice X' dans $\mathcal{B}'$. Alors :*

$$X = PX'.$$

Démonstration :

Puisque $x = \mathrm{Id}_E(x)$, la proposition 4 permet d'écrire que $M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \times M_{\mathcal{B}'}(x)$, soit $X = PX'$. □

Remarque : La formule de changement de base $X = PX'$ permet de calculer les anciennes coordonnées (dans la base $\mathcal{B}$) en fonction des nouvelles (dans la base $\mathcal{B}'$). Pour avoir les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, on écrira :

$$X' = P^{-1}X.$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple 1) du paragraphe précédent : $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (2, -1)$ et $f_2 = (1, 3)$. On a vu que $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a facilement $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ en calculant le produit :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}y \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ sont donc $\left(\frac{3}{7}x - \frac{1}{7}y, -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y\right)$.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 - X^2$. Déterminer les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3 Formule de changement de base pour les applications linéaires

Proposition 19 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et soit M' sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Soient $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$. Alors :*

$$M' = Q^{-1}MP.$$

Démonstration :

La relation $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donne $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_F) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \times M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, soit $M' = Q^{-1}MP$. □

Exemple :

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ où $e_1' = (1, 2, 0)$, $e_2' = (-1, 0, 1)$ et $e_3' = (0, 1, 1)$ et $\mathcal{C}' = (f_1', f_2')$ où $f_1' = (2, -1)$ et $f_2' = (1, 3)$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ est $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, donc la matrice M' de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est :

$$M' = Q^{-1}MP = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 33 & 6 & 27 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 20 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit f un endomorphisme de E. Soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et soit M' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Alors :*

$$M' = P^{-1}MP.$$

Exercice 6 Soit l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P)(X) = P(X) + P(1-X)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) où $P_1 = 1$, $P_2 = 2X - 1$, $P_3 = X^2 - X$ et $P_4 = 2X^3 - 3X^2 + X$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3) Déterminer la matrice de f dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) en appliquant la formule de changement de base. Retrouver le résultat en calculant $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3)$ et $f(P_4)$.

4 Matrices semblables

Définition 9 *Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$.*

Proposition 21 *Deux matrices carrées sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases (éventuellement) différentes.*

Démonstration :

Le sens réciproque est une conséquence du corollaire précédent. Pour le sens direct, soient A et B deux matrices semblables d'ordre n. Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soient f et φ les endomorphismes de E tels que $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $P = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Soit $\mathcal{B}'$ l'image de la famille $\mathcal{B}$ par φ : c'est une base de E (car φ est bijectif) et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P$. La formule de changement de base donne $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = B$. $\square$