Correction du DNS 27

Partie I

1) L'équation est équivalente à $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions définies par

$$y(x) = \lambda e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = \lambda e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{1+x^2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise la méthode de variation de la constante en posant $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et en cherchant une solution de la forme $y = z\psi$. Les calculs mènent à $z'(x) = \frac{1}{x}$.

En prenant $z(x) = \ln x$, on obtient une solution particulière définie par $y(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+x^2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Enfin, on a $y(0) = 1$ si et seulement si $\lambda = 0$, donc la solution cherchée est définie par

$$y(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

2) a) La fonction g est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et, pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = \frac{-2(x^2+1)}{x^3} < 0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur I . On a facilement $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Comme de plus g est continue sur I , on en déduit qu'elle définit une bijection de I dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle s'annule en un unique point α de I .

b) La fonction f est dérivable sur I , et, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{xg(x)}{(1+x^2)^2}$$

qui est du signe de $g(x)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (croissances comparées).

c) On peut utiliser la formule de Taylor-Young ou faire des opérations sur les DL.

Avec Taylor-Young : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $f''(x) = \frac{(1-3x^2)g(x) + x(1+x^2)g'(x)}{(1+x^2)^3}$ pour tout $x \in I$.

Ainsi

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + o((x-1)^2) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

au voisinage de 1.

On peut aussi se ramener en 0 en posant $h = x - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(1+h) &= \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ln(1+h)}{1+h+h^2/2} \\ &= \frac{1}{2} (h - h^2/2 + o(h^2))(1 - (h+h^2/2) + (h+h^2/2)^2 + o(h^2)) \\ &= \frac{1}{2} (h - h^2/2 - h^2 + o(h^2)) \\ &= \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{4} + o(h^2) \end{aligned}$$

au voisinage de 0, donc

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

au voisinage de 1.

Partie II

1) a) Pour tout $x > 0$, la fonction f est continue sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) donc l'intégrale définissant $F(x)$ existe.

b) Si $x > 1$, alors $f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2} > 0$ pour tout $t \in [1, x]$, donc $F(x) > 0$ (puisque f est continue, l'intégrale ne peut pas être nulle). Si $0 < x < 1$, alors $f(t) < 0$ pour tout $t \in [x, 1]$, donc $F(x) = -\int_x^1 f(t)dt > 0$ également (attention à l'ordre des bornes dans ce cas).

2) D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. Par conséquent F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $F' = f$. La fonction F est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

3) On obtient le DL de F en primitivant celui de f (noter que $F(1) = 0$ donc le terme constant est nul) :

$$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

au voisinage de 1.

4) On pose $t = \frac{1}{u}$. Alors $dt = -\frac{1}{u^2}du$ et

$$F(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1 + \frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2} du = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln u}{u^2 + 1} du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du = F\left(\frac{1}{x}\right).$$

5) a) $\text{Arctan } x \sim x$ au voisinage de 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$ et donc φ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite on note encore φ la fonction ainsi prolongée (en posant donc $\varphi(0) = 1$).

b) Il suffit d'intégrer par parties ($u(t) = \ln t$, $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = \text{Arctan } t$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$).

c) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Arctan } x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

et puisque φ est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_1^x \varphi(t)dt$ est une primitive de φ sur $[0, +\infty[$ (théorème fondamental de l'analyse) donc elle est continue en 0, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x \varphi(t)dt = \int_1^0 \varphi(t)dt.$$

Par conséquent F est prolongeable par continuité en 0.

d) On a $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ donc F n'est pas dérivable en 0 (théorème de limite de la dérivée). La courbe représentative de F admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

e) Il suffit de faire tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

6) a) En intégrant par parties on a

$$I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_1^x - \frac{1}{k+1} \int_1^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{1}{k+1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_1^x = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x + \frac{1-x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} I_k(x) = \frac{1}{(k+1)^2}$.

b) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t^2 \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$. On a :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_1^x \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} \right) \ln t dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_1^x t^{2k} \ln t dt - (-1)^n \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t dt.$$

Par conséquent :

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| = \left| -(-1)^n \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t dt \right| = \left| \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t dt \right| \leq - \int_1^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t \right| dt = \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t dt$$

(les bornes dans l'intégrale ne sont pas dans le bon ordre, et le $\ln$ est négatif).

Or $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, donc $\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t dt \leq \int_1^x t^{2n+2} \ln t dt = I_{2n+2}(x)$, donc on a bien

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x).$$

d) D'après a) et c), en faisant tendre x vers 0, on obtient $|F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+3)^2} = 0$, donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = F(0)$.