Devoir n°28 (non surveillé)

EXERCICE 1

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul et soit a un réel fixé.

1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P)=\big(P(a),P'(a),P''(a),\dots,P^{(n)}(a)\big)$.

a) Montrer que φ est une application linéaire.

b) Montrer sans calculs que $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$.

c) En déduire que φ est un isomorphisme.

2) Pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$ on pose $P_k=(X-a)^k$.

a) Montrer que la famille $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que $P_k^{(p)}=\begin{cases}\dfrac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p} & \text{si } p\leqslant k\\ 0 & \text{si } p>k\end{cases}$.

3) On note $\mathcal{C}=(e_0,e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer que $\varphi(P_k)=k!\,e_k$ pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$. En déduire $\varphi^{-1}(e_k)$.

b) Vérifier que, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a)e_k$.

c) Quelle formule retrouve-t-on en appliquant φ^{-1} aux deux membres de l'égalité précédente ?

EXERCICE 3

Soit E un K-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p\circ q+q\circ p=0$.

1) Montrer que $p\circ q=q\circ p=0$.

2) Montrer que $p+q$ est un projecteur.

3) Montrer que $\operatorname{Ker}(p+q)=\operatorname{Ker}p\cap\operatorname{Ker}q$.

4) Montrer que $\operatorname{Im}(p+q)=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Im}q$.