Correction du DNS 28

EXERCICE 1

Posons $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Alors

$$\ln p_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est continue sur $[0,1]$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \ln p_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx.$$

On intègre par parties en posant $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = x+1$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v'(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$ (noter le choix de $x+1$ au lieu de x pour simplifier les calculs). On a donc

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \big[(x+1)\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{1+x}\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln p_n = 2\ln 2 - 1$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

EXERCICE 2

1) a) Soient P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha P + \beta Q) &= \big((\alpha P+\beta Q)(a), (\alpha P+\beta Q)'(a), \ldots, (\alpha P+\beta Q)^{(n)}(a)\big)\\
&= \big(\alpha P(a) + \beta Q(a), \alpha P'(a) + \beta Q'(a), \ldots, \alpha P^{(n)}(a) + \beta Q^{(n)}(a)\big)\\
&= \alpha\big(P(a), P'(a), \ldots, P^{(n)}(a)\big) + \beta\big(Q(a), Q'(a), \ldots, Q^{(n)}(a)\big)\\
&= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q).
\end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

b) Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\varphi(P) = 0$, donc $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(n)}(a) = 0$: a est donc racine de P d'ordre $n+1$ au moins d'après un théorème du cours.

Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire que $\deg P \leqslant n$, et un polynôme non nul de degré p a au maximum p racines (comptées avec leur ordre de multiplicité). Par conséquent $P = 0$.

On en déduit que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

c) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ donc φ est injective. De plus, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont deux espaces vectoriels de même dimension $(n+1)$. Par conséquent φ est bijective. C'est donc un isomorphisme.

2) a) La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés, donc elle est libre. De plus, son cardinal $(n+1)$ est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Le polynôme P_k est de degré k, donc $P_k^{(p)} = 0$ si $p > k$.

Montrons par récurrence sur p que $P_k^{(p)} = \dfrac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, k\}$.

Pour $p = 0$: $P_k^{(0)} = P_k = (X-a)^k = \dfrac{k!}{(k-0)!}(X-a)^{k-0}$.

Soit $p \in \{0, \ldots, k-1\}$. Supposons que $P_k^{(p)} = \dfrac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p}$. On dérive :

$$P_k^{(p+1)} = \frac{k!}{(k-p)!}(k-p)(X-a)^{k-p-1} = \frac{k!}{(k-p-1)!}(X-a)^{k-p-1}.$$

C'est ce qu'on voulait. Le théorème de récurrence permet de conclure.

3) a) Si $p < k$, alors $k - p > 0$, donc $P_k^{(p)}(a) = 0$ (on remplace X par a dans la formule précédente). Si $p = k$, alors $P_k^{(p)} = \dfrac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p} = k!$, donc $P_k^{(p)}(a) = k!$. Enfin, si $p > k$, alors $P_k^{(p)} = 0$ donc $P_k^{(p)}(a) = 0$. Ainsi

$$\varphi(P_k) = \big(P_k(a), P_k'(a), \ldots, P_k^{(k)}(a), \ldots, P_k^{(n)}(a)\big) = \big(0, 0, \ldots, 0, k!, 0, \ldots, 0\big) = k!\, e_k.$$

Par conséquent $\varphi^{-1}(k!\, e_k) = P_k$.

b) On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= \big(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)\big) \\
&= \big(P(a), 0, \dots, 0\big) + \big(0, P'(a), \dots, 0\big) + \dots + \big(0, 0, \dots, P^{(n)}(a)\big) \\
&= P(a)\big(1, 0, \dots, 0\big) + P'(a)\big(0, 1, \dots, 0\big) + \dots + P^{(n)}(a)\big(0, 0, \dots, 1\big) \\
&= P(a)e_0 + P'(a)e_1 + \dots + P^{(n)}(a)e_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)e_k.
\end{aligned}$$

c) L'application φ^{-1} est linéaire donc, d'après 3)b) :

$$\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\varphi^{-1}(e_k) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{1}{k!}P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Comme $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$, on obtient finalement la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

EXERCICE 3

1) On a $p \circ q = -q \circ p$. En composant à gauche par p on obtient $p \circ p \circ q = -p \circ q \circ p$.

Or $p \circ p \circ q = p \circ q$ (car p est un projecteur) et $-p \circ q \circ p = q \circ p \circ p = q \circ p$, donc $p \circ q = q \circ p$.

On en déduit que $2p \circ q = 0$ et donc que $p \circ q = 0$.

2) L'application $p+q$ est linéaire et $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ donc $p+q$ est un projecteur.

3) On raisonne par double inclusion.

Montrons d'abord que $\operatorname{Ker}(p+q) \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Soit donc $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$. Alors $(p+q)(x) = 0$, donc $p(x) = -q(x)$. En appliquant p on en déduit que $p^2(x) = -p \circ q(x)$, soit $p(x) = 0$, et en appliquant q on obtient $q \circ p(x) = -q^2(x)$, d'où $q(x) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Montrons maintenant que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q)$. Soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$.

On conclut que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

4) On va montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, puis que la somme est directe.

Montrons d'abord que $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Soit donc $y \in \operatorname{Im}(p+q)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = (p+q)(x)$. Alors $y = p(x) + q(x) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Montrons ensuite que $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p+q)$. Soit $y \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Il existe donc $y_1 \in \operatorname{Im} p$ et $y_2 \in \operatorname{Im} q$ tels que $y = y_1 + y_2$. Soit $x_1 \in E$ tel que $y_1 = p(x_1)$ et soit $x_2 \in E$ tel que $y_2 = q(x_2)$. Alors $p(y_1) = y_1$, $q(y_2) = y_2$, $q(y_1) = q \circ p(x_1) = 0$ et $p(y_2) = p \circ q(x_2) = 0$, donc $(p+q)(y) = p(y_1) + p(y_2) + q(y_1) + q(y_2) = y_1 + y_2 = y$ et donc $y \in \operatorname{Im}(p+q)$.

Montrons enfin que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$. Soit $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Alors $p(y) = y$ et $q(y) = y$, donc $p \circ q(y) = p(q(y)) = p(y)$ $= y$, d'où $y = 0$.

On a donc bien montré que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.