Devoir n°30 (non surveillé)

EXERCICE 1

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec probabilité $1/2$, la pièce B donne face avec probabilité $2/3$. On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si on obtient face, on conserve la pièce qu'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1) On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n^e lancer.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{3}$.

b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

2) Déterminer la probabilité d'obtenir face au n^e lancer.

3) Déterminer la probabilité d'avoir lancé la pièce A au n^e lancer sachant qu'on a obtenu face à ce lancer, puis la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Une **partition** d'un ensemble E est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E. Par exemple, $\{\{1,4\},\{2,3,5\},\{6\}\}$ est une partition de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une **k-partition** d'un ensemble E est une partition de E de cardinal k. Ainsi $\{\{1,4\},\{2,3,5\},\{6\}\}$ est une 3-partition de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On pose $E_n = \{1,\dots,n\}$ et on note B_n le nombre de partitions de E_n. On pose par convention $B_0 = 1$.

Enfin, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, on note $B_{n,k}$ le nombre de k-partitions de E_n. On a donc en particulier $B_{n,0} = 0$.

1) a) Déterminer les partitions de E_1, de E_2 et de E_3.

b) En déduire B_1, B_2 et B_3 ainsi que $B_{1,1}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{3,1}$, $B_{3,2}$ et $B_{3,3}$.

2) a) Déterminer $B_{n,1}$ et $B_{n,n}$.

b) Déterminer $B_{n,n-1}$.

c) Déterminer $B_{n,2}$.

3) a) Établir, pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$, la relation $B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + kB_{n-1,k}$.

b) Construire à l'aide de cette relation un tableau analogue au triangle de Pascal contenant les valeurs des $B_{n,k}$ pour $n \leqslant 5$. En déduire B_4 et B_5.

c) Déduire du a) une relation entre $B_{n,n-1}$ et $B_{n-1,n-2}$, puis retrouver la valeur de $B_{n,n-1}$.

d) De même, trouver une relation entre $B_{n,2}$ et $B_{n-1,2}$, en déduire la nature de la suite $(B_{n,2})_{n\geqslant 2}$ et retrouver la valeur de $B_{n,2}$.

4) a) Soit A une partie de E_{n+1} contenant $n+1$ et de cardinal $k+1$. Déterminer le nombre de partitions de E_{n+1} contenant A.

b) En déduire que $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

c) En déduire B_6.

5) Écrire en Python une fonction récursive `B` (de préférence avec mémoïsation) qui, recevant un entier naturel n, renvoie la valeur de B_n. On pourra supposer qu'on dispose d'une fonction `binomial` telle que `binomial(n, k)` renvoie la valeur de $\dbinom{n}{k}$.