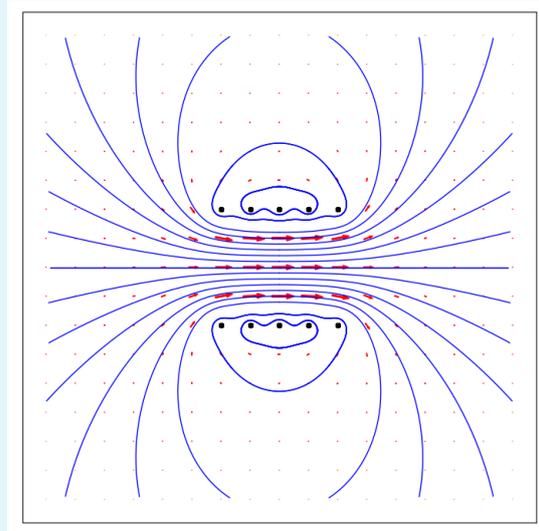
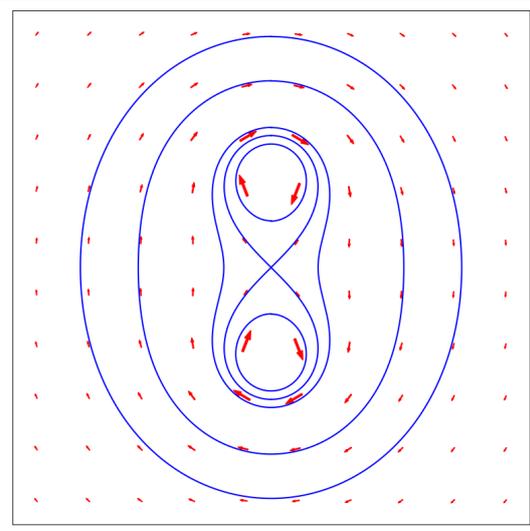


Chapitre 27 : Champ magnétique

Fiche méthode

1 Exploiter une carte de champ magnétique

Situation : Les champs magnétiques représentés par les cartes ci-dessous sont obtenues avec des courants électriques (pas d'aimants). Indiquer dans chacun des cas la position des sources, le sens du courant, les zones de champ fort et faible, et le cas échéant s'il existe une zone de l'espace où le champ magnétique est uniforme.

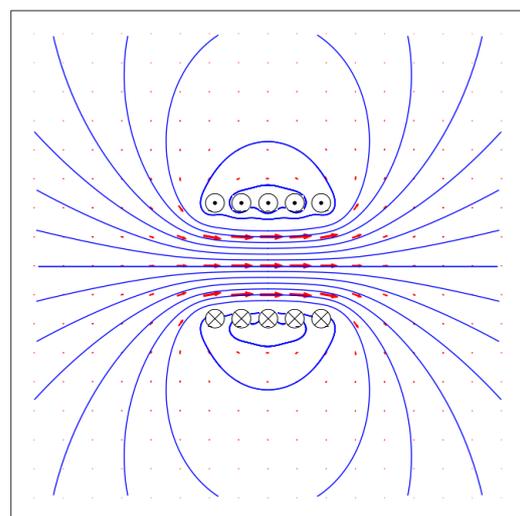
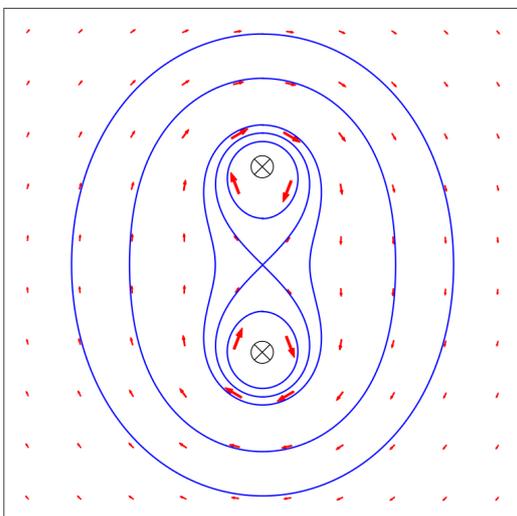


► Position des sources, sens des courants

À retenir : les lignes de champ s'enroulent autour des sources et leur orientation est donnée par la règle de la main droite.

Sur la carte de gauche on distingue deux sources. L'orientation des lignes de champ, que l'on devine grâce au champ vectoriel représenté sur la carte, indique que les deux courants sont de même sens \otimes , ce qui exclut que le circuit soit une spire.

Sur la carte de droite il y a cinq courants \odot et cinq courants \otimes , ce qui pourrait correspondre à cinq spires coaxiales.



► Zones de champ fort, faible, uniforme

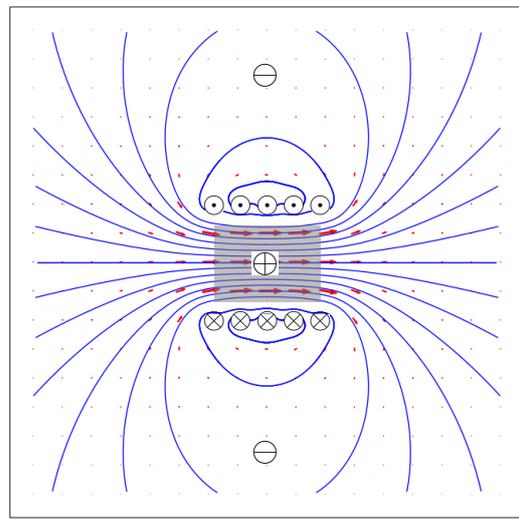
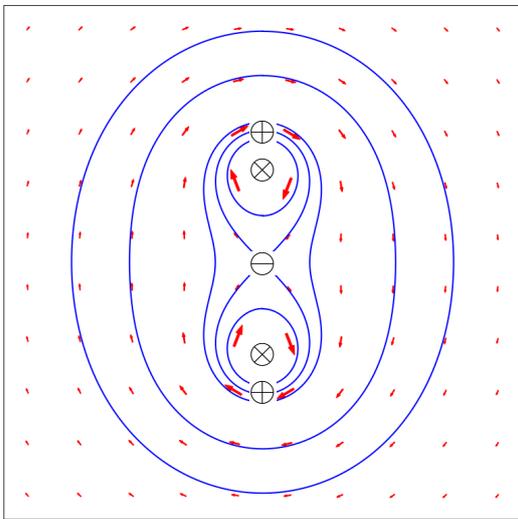
À retenir : l'intensité d'un champ magnétique est :

- croissante quand on se déplace dans le sens de lignes de champ convergentes,
- décroissante quand on se déplace dans le sens de lignes de champ divergentes,
- uniforme dans une zone où les lignes de champ sont parallèles les unes aux autres.

Le champ magnétique est nul en un lieu où plusieurs lignes de champ se rejoignent.

Sur la carte de gauche le champ est le plus fort (\oplus) à proximité des sources, au-dessus de la source du haut et en-dessous de la source du bas. Le champ est faible (\ominus) entre les sources et s'annule même au centre de la carte. Il n'y a pas de zone des champ uniforme.

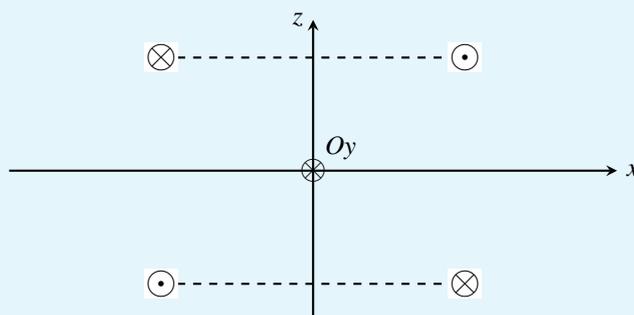
Sur la carte de droite le champ est fort et uniforme dans la zone située entre les sources (zone grisée). En dehors de cette zone le champ s'affaiblit à mesure que l'on s'éloigne des sources, il est particulièrement faible sur l'axe de symétrie vertical.



Application 1 : TD : exercice 1.

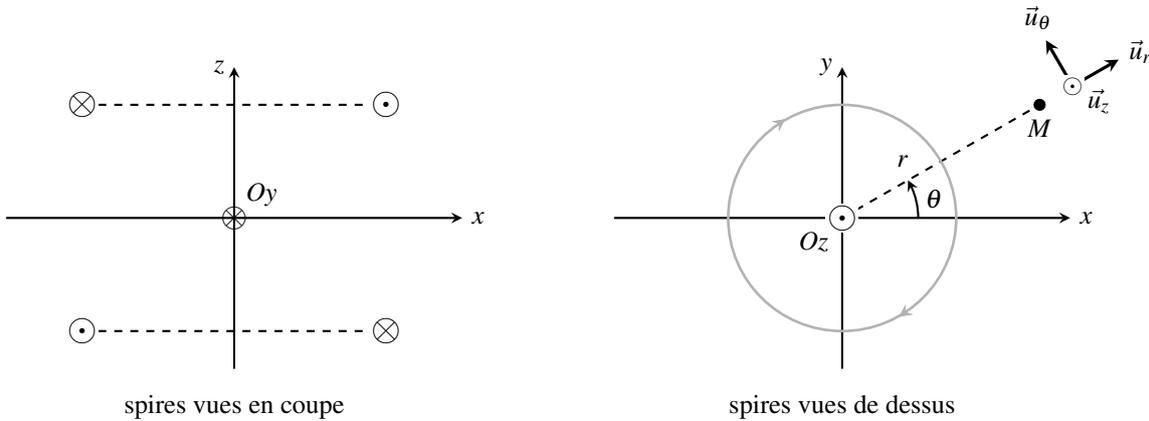
2 Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources

Situation : On considère le montage ci-dessous, constitué de deux spires circulaires horizontales parcourues par le même courant électrique mais dans des sens opposés. Déterminer les propriétés du champ magnétique produit dans le plan de symétrie des spires (Oxy). En déduire l'allure des lignes de champ dans ce plan, en justifiant leur orientation. Quel est le champ au point O ? Que se passe-t-il si l'on change le sens du courant dans les deux spires ?



► Choisir un système de coordonnées

Compte tenu de la forme géométrie du problème on se place dans le repère **cylindrique** $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On représente ci-dessous la situation avec les spires vues en coupe puis vues de dessus.



À l'intérieur du plan (Oxy) le champ magnétique est de direction *a priori* quelconque, et dépend des coordonnées (r, θ) du point M . L'expression générale du champ magnétique est donc la suivante :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) \\ B_z(r, \theta) \end{pmatrix}$$

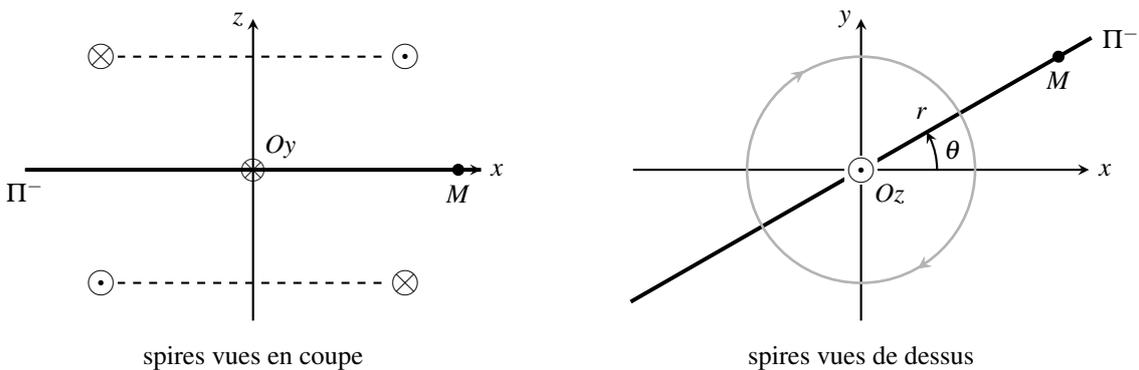
► Exploiter les invariances

Il y a invariance des courants par rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) donc **le champ magnétique ne dépend pas de la coordonnée θ** .

► Exploiter les symétries

À retenir :

Si M appartient à un plan de symétrie pour les courants (plan Π^+), alors le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est orthogonal à Π^+ .
 Si M appartient à un plan d'antisymétrie pour les courants (plan Π^-), alors le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est contenu dans Π^- .

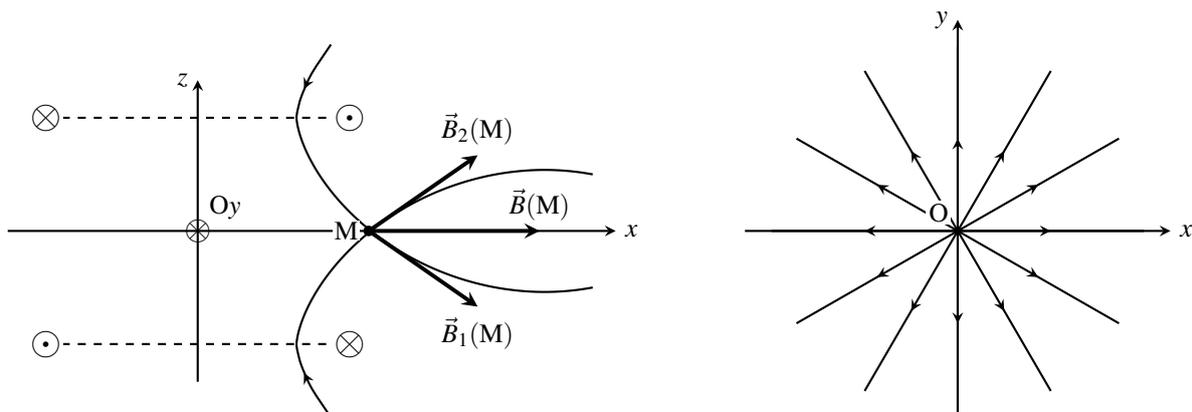


Dans le cas présent (voir figure ci-dessus), pour un point M quelconque appartenant au plan (Oxy) :

- le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est $\Pi^- \rightarrow$ on en déduit que $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan et n'a donc pas de composante selon \vec{u}_θ ;
- le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est $\Pi^+ \rightarrow$ on en déduit que $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan et n'a donc pas de composante selon \vec{u}_z .

On conclut de l'étude des symétries et invariances que dans le plan (Oxy) le champ magnétique est **radial** : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_r$.
 Dans ce plan les lignes de champ sont des **demi-droites partant de l'origine**.

Pour déterminer leur sens on trace l'allure de la ligne de champ qui passe par M pour chaque spire, et on les oriente avec la règle de la main droite. On en déduit l'orientation du champ créé par chaque spire au point M puis l'orientation du champ résultant. Sur le schéma ci-dessous (à gauche) on note $\vec{B}_1(M)$ le champ produit par la spire supérieure en M, $\vec{B}_2(M)$ celui produit par la spire inférieure et $\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$ le champ résultant.



On conclut qu'avec cette disposition des courants le champ magnétique dans le plan (Oxy) est **radial et divergent**. On trace ci-dessus (à droite) l'allure de la carte de champ dans ce plan. Si l'on change le sens des courants dans les spires alors les champs $\vec{B}_1(M)$ et $\vec{B}_2(M)$ sont renversés et donc le champ $\vec{B}(M)$ également. Le champ magnétique est alors **radial et convergent**.

On peut retenir de cet exercice cette méthode simple pour produire un champ magnétique radial (convergent ou divergent), à l'intérieur d'un plan.

Application 2 : TD : exercice 2.

3 Calcul de champ magnétique : cas du solénoïde

Situation : Un solénoïde est réalisé avec un fil de cuivre de section $s = 3,0\text{mm}^2$, enroulé sur un cylindre en carton de section $S = 50\text{cm}^2$ et de longueur $L = 60\text{cm}$. On a pesé la masse du fil de cuivre avant de construire le solénoïde : $m = 9,1\text{kg}$. La masse volumique du cuivre est $\rho_{\text{Cu}} = 8,96\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

1. L'approximation du solénoïde infini est-elle valable ?
2. Calculer la longueur du fil de cuivre ℓ nécessaire pour réaliser le solénoïde.
3. Calculer le nombre de spires N_s enroulées pour chaque couche de fil.
4. Calculer le nombre de couches de fils N_c bobinées autour du cylindre en carton (on précisera les hypothèses effectuées et on arrondira à la valeur entière la plus proche).
5. Calculer le champ magnétique obtenu au centre du solénoïde si l'on impose une intensité $I = 2,0\text{A}$. Faire une représentation schématique.
On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

► Mettre en œuvre des calculs géométriques

Rappel de cours : on considère que l'approximation du solénoïde infini est valable à partir du moment où la longueur L du solénoïde est grande devant son rayon R : $L \gtrsim 10R$.

1. On calcule le rayon intérieur du solénoïde à partir de la section du cylindre de carton :

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4,0\text{cm} \implies \boxed{\frac{L}{R} = 15}$$

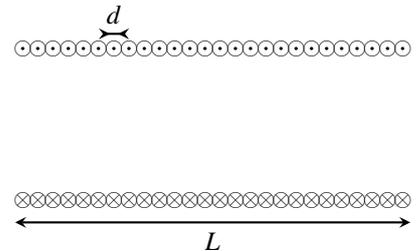
On peut considérer que l'approximation du solénoïde infini est valable.

2. On relie la masse totale du fil de cuivre à son volume : $m = \rho_{\text{Cu}}V$. En première approximation on considère que le volume du fil est celui d'un cylindre droit de section s et de hauteur ℓ :

$$m = \rho_{\text{Cu}}\ell s \iff \boxed{\ell = \frac{m}{\rho_{\text{Cu}}s} = 3,4 \cdot 10^2 \text{m}}$$

3. Les fils de cuivre sont supposés au contact les uns des autres (on néglige l'épaisseur de la couche d'isolant qui entoure le cuivre). Ainsi le nombre de spires est fixé par la longueur du solénoïde et la diamètre des fils (voir figure ci-dessous).

$$L = N_s d = 2N_s \sqrt{\frac{s}{\pi}} \iff \boxed{N_s = \frac{L}{2\sqrt{\frac{s}{\pi}}} = 307}$$



4. **Première méthode : estimation approchée.** On néglige dans un premier temps l'épaisseur des fils et on considère que toutes les couches de fil ont le même rayon R . On détermine la longueur de fil pour chaque couche en sommant les périmètres des N_s spires circulaires :

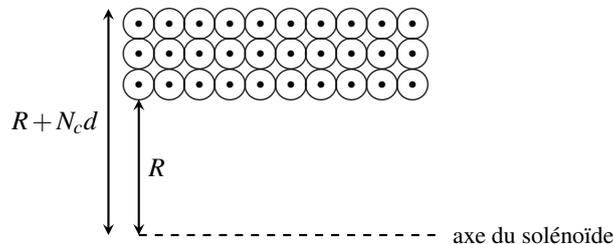
$$L_c = N_s \times 2\pi R$$

On en déduit le nombre total de couches :

$$\boxed{N_c = \frac{\ell}{L_c} = 4,4}$$

Comme on est censé trouver un nombre entier on arrondit à $\boxed{N = 4}$.

Deuxième méthode : estimation plus fine. On détermine plus rigoureusement le rayon des différentes couches (voir figure ci-dessous).



Le rayon intérieur de la bobine vaut R et son rayon extérieur vaut $R + N_c d$, par conséquent on réécrit la relation précédente en remplaçant le rayon R par le rayon "moyen" des couches $\bar{R} = R + \frac{N_c d}{2}$:

$$L_c = N_s \times 2\pi \bar{R} \implies N_c = \frac{\ell}{L_c} = \frac{\ell}{2\pi N_s \left(R + \frac{N_c d}{2} \right)}$$

Finalement il revient à dire que le nombre de couches N_c vérifie l'équation du deuxième degré suivante :

$$N_c^2 + \frac{2R}{d} N_c - \frac{\ell}{\pi d N_s} = 0$$

On résout cette équation et on obtient : $\boxed{N_c = 4,0}$. La valeur trouvée est entière, le résultat est cohérent.

► **Calculer le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini**

Rappel de cours : Le champ magnétique créé par un solénoïde infini de longueur L , contenant N spires parcourues par un courant i stationnaire vaut :

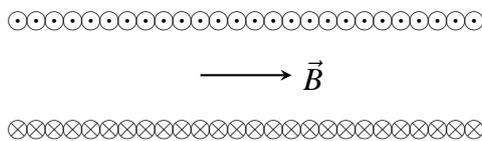
$$\begin{cases} \vec{0} & \text{à l'extérieur} \\ \mu_0 \frac{N}{L} i \vec{u} & \text{à l'intérieur} \end{cases}$$

où \vec{u} est un vecteur colinéaire à l'axe du solénoïde et orienté en fonction du sens du courant avec la règle de la main droite.

Le nombre total de spires de ce solénoïde vaut $N = N_s N_c$. On en déduit que le champ magnétique au centre du solénoïde vaut, en norme :

$$\|\vec{B}\| = \mu_0 \frac{N_s N_c}{L} i = 5,1 \text{ mT}$$

On représente schématiquement ce champ magnétique en choisissant arbitrairement l'orientation du courant dans le solénoïde.



Application 3 : TD : exercice 3.

4 Moment magnétique d'une boucle de courant plane

Situation : On considère une bobine plate constituée de 200 spires rectangulaires de côtés $a = 10 \text{ cm}$ et $b = 15 \text{ cm}$.

1. Rappeler l'ordre de grandeur du moment magnétique d'un aimant usuel.
2. Calculer le courant qu'il faut imposer dans la bobine pour obtenir le même moment magnétique.

► **Définir et calculer le moment magnétique d'une boucle de courant**

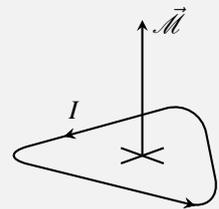
1. Le moment magnétique d'un aimant usuel est de l'ordre de **1 à 10 A · m⁻²**.

À retenir : Le moment magnétique d'une boucle de courant plane est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$$

où I est l'intensité du courant dans la boucle et \vec{S} est le vecteur surface de la boucle, orthogonal au plan dans lequel elle se trouve et orienté en fonction du sens du courant avec la règle de la main droite.

Dans une bobine qui contient N spires coaxiales les moments magnétiques s'additionnent : $\vec{\mathcal{M}} = NI \vec{S}$.



2. Le courant à imposer est tel que :

$$\mathcal{M} = NIab \iff I = \frac{\mathcal{M}}{Nab} \sim 0,3 \text{ à } 3 \text{ A}$$

Application 4 : TD : exercice 5.

5 Actions de Laplace sur une tige mobile

5.1 Force résultante : montage des rails de Laplace

Situation : On considère le dispositif des rails de Laplace distants de $\ell = 10\text{ cm}$, posés sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale. On place une tige conductrice de masse m sur les rails. Le champ magnétique extérieur est uniforme, dirigé selon la verticale ascendante, de norme $B = 1,3\text{ T}$. Le circuit est alimenté par un générateur qui impose un courant I stationnaire. Le champ de pesanteur vaut $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

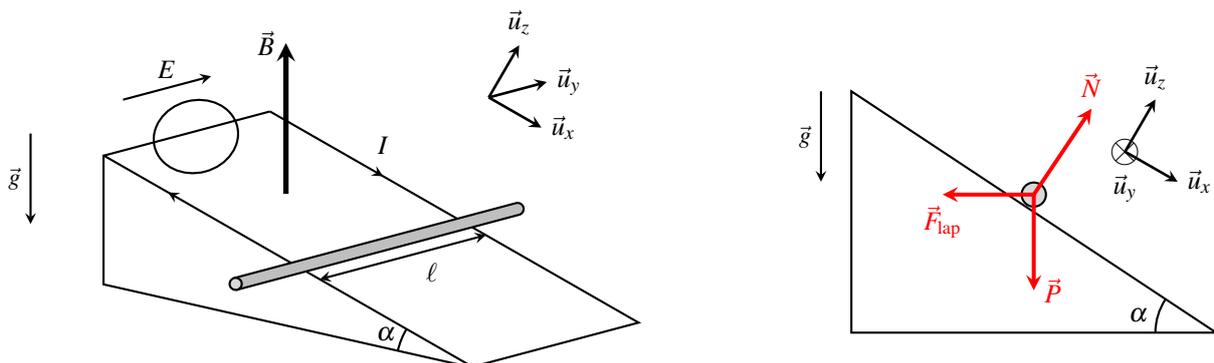
1. Faire un schéma du dispositif. Dans quel sens doit circuler le courant pour que la tige puisse demeurer en équilibre ?
2. La tige peut demeurer en équilibre si l'on impose un courant $I = 0,82\text{ A}$. Calculer m .

À retenir : Soit AC une portion de conducteur électrique (de forme quelconque), parcourue par un courant d'intensité I dirigé de A vers C, plongée dans un champ magnétique extérieur \vec{B} uniforme. La force de Laplace résultante qui s'exerce sur cette portion vaut :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = I \overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$$

► Effectuer une représentation schématique

1. On se place dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec le vecteur \vec{u}_z orthogonal au plan des rails, dirigé vers le haut. On représente le plan des rails en perspective sur la figure ci-dessous, à gauche.



La force de Laplace qui s'exerce sur un élément de courant $d\vec{C} = I d\vec{\ell}$ vaut $d\vec{F}_{\text{lap}} = d\vec{C} \wedge \vec{B}$. Compte tenu de l'orientation de la tige et du champ magnétique, la tige est soumise à une force de Laplace horizontale, dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z) . Pour que cette force s'oppose au poids et maintienne la tige en équilibre il faut que sa projection dans le plan des rails soit dirigée selon $-\vec{u}_x$ (voir ci-dessus à droite la représentation de profil). En utilisant la règle des trois doigts de la main droite on détermine alors que le courant qui circule dans la tige doit être orienté selon $-\vec{u}_y$.

► Établir une condition d'équilibre mécanique

2. On applique le principe fondamental de la statique à la tige, soumise à la force de Laplace \vec{F}_{lap} , à son poids \vec{P} et à la réaction normale des rails \vec{N} . On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\vec{F}_{\text{lap}} + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

On calcule la force de Laplace résultante qui s'exerce sur la tige :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{lap}} &= I \times (-\ell \vec{u}_y) \wedge \vec{B} = -I \ell \vec{u}_y \wedge B (\cos \alpha \vec{u}_z - \sin \alpha \vec{u}_x) \\ &= -IB\ell (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z) \end{aligned}$$

On projette le PFS sur \vec{u}_x :

$$-IB\ell \cos \alpha + mg \sin \alpha = 0 \iff m = \frac{IB\ell}{g \tan \alpha} = 30\text{ g}$$

5.2 Moment résultant : moteur électrique

Situation : On modélise de façon très simplifiée le moteur d'un système d'assistance électrique de vélo.

Une barre OC de longueur a et solidaire du pédalier tourne autour de l'axe vertical $\Delta = (Oz)$, son extrémité C s'appuyant sur un cercle conducteur horizontal de centre O et de rayon $a = 1,0\text{m}$, et admettant l'axe Δ comme axe de symétrie orthogonal au cercle. La barre et le cercle sont des conducteurs électriques.

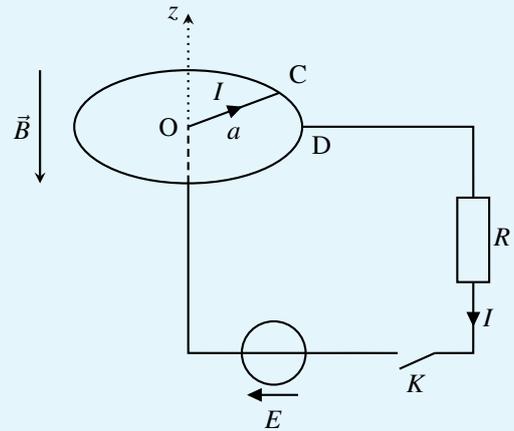
La batterie est modélisée par une source idéale de tension. Elle alimente avec un courant d'intensité $I = 3,0\text{A}$ un circuit électrique connecté en O à la barre mobile et en D au cercle conducteur.

Un interrupteur K permet au cycle de solliciter (K fermé) ou non (K ouvert) l'assistance électrique.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme, constant et vertical $\vec{B} = -B\vec{u}_z$ avec $B = 1,0\text{T}$.

On suppose que le pédalier tourne à vitesse angulaire constante. Son vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$ avec $\omega = 100\text{tours/min}$.

Calculer la puissance des actions de Laplace qui s'exercent sur la barre en rotation.



À retenir : Soit AC une portion **rectiligne** de conducteur électrique, parcourue par un courant d'intensité I dirigé de A vers C, plongée dans un champ magnétique extérieur \vec{B} **uniforme**. Le moment résultant des actions de Laplace sur cette portion se calcule en appliquant la force de Laplace résultante **au centre de [AC]**.

À retenir : Pour un système en rotation autour d'un axe fixe Δ , avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_\Delta$, la puissance d'une force extérieure \vec{F} s'écrit :

$$\mathcal{P} = \omega \cdot \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

On commence par représenter schématiquement la situation dans un plan orthogonal à \vec{u}_z .

On exprime la force de Laplace résultante qui s'exerce sur la barre mobile et on la projette dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

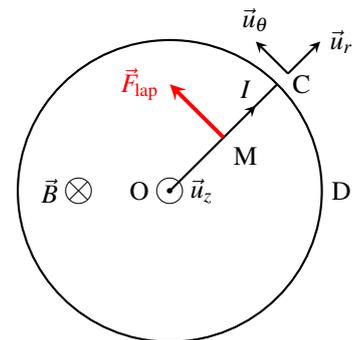
$$\vec{F}_{\text{lap}} = I\vec{OC} \wedge \vec{B} = Ia\vec{u}_r \wedge (-B\vec{u}_z) = IaB\vec{u}_\theta$$

On calcule le moment résultant des actions de Laplace par rapport à Δ . On applique la force de Laplace résultante au centre M de la barre.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}_{\text{lap}}) \cdot \vec{u}_z = \frac{a}{2}\vec{u}_r \wedge (IaB\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{2}Ia^2B$$

On conclut en déterminant numériquement la puissance des actions de Laplace :

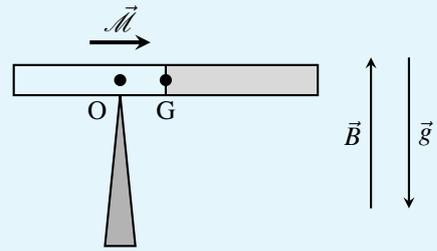
$$\mathcal{P}_{\text{lap}} = \omega \cdot \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \implies \mathcal{P}_{\text{lap}} = \frac{1}{2}Ia^2B\omega = 16\text{W}$$



Application 5 : TD : exercice 7.

6 Couple de Laplace sur un moment magnétique

Situation : Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et de masse m , repose en équilibre au sommet O d'une pointe. Il est soumis à un champ uniforme \vec{B} et à la gravité. Évaluer la distance $d = OG$, où G est le centre d'inertie de l'aimant, pour que celui-ci reste en équilibre vertical.



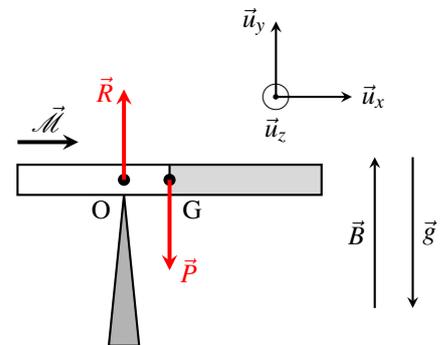
► Introduire les notations utiles

On se place dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le vecteur \vec{u}_z étant perpendiculaire au plan du schéma (voir ci-dessous). Le moment magnétique peut potentiellement pivoter autour de l'axe (Oz) .

► Mettre en œuvre le TMC

À retenir : un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} est soumis au couple :

$$\vec{\Gamma}_{\text{lap}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$



On applique le théorème du moment cinétique à l'aimant, en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen, par rapport à l'axe fixe (Oz) . L'aimant est soumis à son poids, à la réaction de la pointe \vec{R} et au couples des actions de Laplace exercé par la champ magnétique :

$$0 = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \vec{\Gamma}_{\text{lap}} \cdot \vec{u}_z$$

Le bras de levier du poids est égal à d et le moment du poids est négatif par rapport à (Oz) ; il vaut $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd$.

Le bras de levier de la réaction est nul : $\mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$.

Le couple de Laplace vaut :

$$\vec{\Gamma}_{\text{lap}} = \mathcal{M} \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_y = \mathcal{M} B \vec{u}_z$$

On revient au TMC :

$$-mgd + \mathcal{M}B = 0 \iff d = \frac{\mathcal{M}B}{mg}$$

Application 6 : TD : exercice 6.