Chapitre 21

VARIABLES ALÉATOIRES

I Variables aléatoires réelles

1 Définition

Définition 1 *Une* **variable aléatoire** *sur un univers Ω est une application $X : \Omega \to E$, où E est un ensemble. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une* **variable aléatoire réelle**. *Si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini, on dit que X est une* **variable aléatoire finie**.

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note :

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$\{X = x\} = \{X \in \{x\}\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\},$$

$$\{X \leqslant x\} = \{X \in]-\infty, x]\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant x\}.$$

On définit de manière similaire les événements $\{X \geqslant x\}$, $\{X < x\}$ et $\{X > x\}$. On peut aussi utiliser les notations $(X \in A)$, $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, etc.

Si P est une probabilité sur Ω, on note $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$, etc., les probabilités de ces événements.

Exemple : Considérons la variable aléatoire réelle X qui associe au résultat du jet de deux dés équilibrés la somme des numéros obtenus. Elle est définie sur $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ et son image est $X(\Omega) = \{2, \ldots, 12\}$. L'événement $\{X = 4\}$ est $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ et $P(X = 4) = 3/36$. L'événement $\{X \leqslant 4\}$ est $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$ et $P(X \leqslant 4) = 6/36$.

Remarque : Si l'univers Ω est fini, on peut énumérer les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dans ce cas, les événements $\{X = x_i\}$ forment un système complet d'événements de Ω (ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω) et la famille $(P(X = x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une distribution de probabilités (sa somme vaut 1).

2 Loi d'une variable aléatoire réelle

Définition 2 *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, P). La* **loi de** X *(ou* **loi de probabilité de** X*) est l'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$P_X(A) = P(X \in A).$$

Puisque Ω est fini, P_X est entièrement déterminée par la donnée des $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. En effet, pour toute partie A de $X(\Omega)$ on peut écrire $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ (réunion disjointe), donc :

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, déterminer la loi de X revient donc à calculer $P(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemple : Reprenons la variable aléatoire X qui associe au résultat du jet de deux dés équilibrés la somme des numéros obtenus. On a $P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$, $P(X = 3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = 1/18$, etc.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Si deux variables aléatoires X et Y ont la même loi, i.e. si $P_X = P_Y$, on note $X \sim Y$.

Proposition 1 *P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.*

Démonstration :

P_X est évidemment à valeurs dans $[0,1]$ et $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = P(X^{-1}(X(\Omega))) = P(\Omega) = 1$. De plus, si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors $X^{-1}(A)$ et $X^{-1}(B)$ le sont aussi, donc $P_X(A \cup B) = P(X \in A \cup B) = P(X^{-1}(A \cup B)) = P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(B)) = P(X \in A) + P(X \in B) = P_X(A) + P_X(B)$. □

Remarque : Après avoir déterminé la loi d'une variable aléatoire finie, penser à vérifier que la somme des $P(X = x)$ est bien égale à 1.

3 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition 3 *Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et soit $f : E \to F$ une application. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire appelée* **image de X par f** *et notée $f(X)$.*

Proposition 2 *Pour toute partie A de $f(X(\Omega))$:*

$$P_{f(X)}(A) = P_X(f^{-1}(A)).$$

En particulier, si Ω est fini, alors pour tout $y \in f(X(\Omega))$:

$$P(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x) = \sum_{i=1}^{p} P(X = x_i)$$

où $x_1, \ldots, x_p$ sont les antécédents de y par f.

Démonstration :

Pour tout $A \subset f(X(\Omega))$ on a $P_{f(X)}(A) = P(f(X) \in A) = P((f \circ X)^{-1}(A)) = P(X^{-1}(f^{-1}(A))) = P(X \in f^{-1}(A)) = P_X(f^{-1}(A))$.
Si $A = \{y\}$, on obtient $P(f(X) = y) = P_X(f^{-1}(\{y\})) = P_X(\{x_1, \ldots, x_p\}) = P(X = x_1) + \ldots + P(X = x_p)$. □

Considérons par exemple une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Alors la variable X^2 est à valeurs dans $\{0, 1, 4\}$ est sa loi est donnée par :

y	0	1	4
$P(X^2 = y)$	0,1	0,4	0,5

En effet $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0{,}1$, $P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}4$ et $P(X^2 = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0{,}5$.

Remarque : On déduit de la proposition précédente que si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

II Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle

1 Espérance

Définition 4 *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).* **L'espérance de** *X est le réel noté $E(X)$ défini par :*

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives. On dit que X est **centrée** si son espérance est 0.

Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Par exemple, l'espérance de la variable aléatoire X égale à la somme des deux dés est $E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7$.

Proposition 3 *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Alors :*

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Démonstration :
Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $P(X = x) = P(X^{-1}(\{x\})) = \sum_{\omega \mid X(\omega) = x} P(\{\omega\})$.
Par conséquent $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \mid X(\omega)=x} P(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \mid X(\omega)=x} xP(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \mid X(\omega)=x} X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. □

Proposition 4 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers fini.*

(i) (Croissance de l'espérance) Si $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

(ii) (Linéarité de l'espérance) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

(iii) (Inégalité triangulaire) $|E(X)| \leqslant E(|X|)$.

Démonstration : Immédiat avec la proposition précédente. □

Proposition 5 (Théorème de transfert) *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Soit $f : X(\Omega) \to F$ une application. Alors l'espérance de $f(X)$ vérifie :*

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Le théorème de transfert permet ainsi de calculer l'espérance de $f(X)$ sans avoir à déterminer sa loi.

Démonstration :
Pour tout $y \in f(X(\Omega))$, on a $P(f(X) = y) = \sum_{x \mid f(x)=y} P(X = x)$ d'après la proposition 2, donc $E(f(X)) = \sum_{y \in f(X(\Omega))} yP(f(X) = y) = \sum_{y \in f(X(\Omega))} y \sum_{x \mid f(x)=y} P(X = x) = \sum_{y \in f(X(\Omega))} \sum_{x \mid f(x)=y} f(x)P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$. □

Reprenons par exemple la variable aléatoire X de la fin du paragraphe précédent. On peut calculer l'espérance de X^2 à partir de sa loi :

$$E(X^2) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}5 = 2{,}4,$$

ou en appliquant le théorème de transfert :

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0{,}2 + (-1)^2 \times 0{,}3 + 0^2 \times 0{,}1 + 1^2 \times 0{,}1 + 2^2 \times 0{,}3 = 2{,}4.$$

Proposition 6 (Inégalité de Markov) *Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs positives. Pour tout $a > 0$:*

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration : $E(X) = \sum_{x<a} xP(X = x) + \sum_{x \geqslant a} xP(X = x) \geqslant \sum_{x \geqslant a} xP(X = x) \geqslant \sum_{x \geqslant a} aP(X = x) = a \sum_{x \geqslant a} P(X = x) = aP(X \geqslant a)$. □

2 Variance

Définition 5 *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).* **La variance de** X *est le réel noté $V(X)$ défini par :*

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

et **l'écart-type de** X *est le réel noté $\sigma(X)$ défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne, elle mesure la dispersion de X autour de sa valeur moyenne $E(X)$. On dit que X est **réduite** si sa variance vaut 1 (et donc son écart-type aussi).

Proposition 7 (Formule de König-Huygens) *Soit X une variable aléatoire réelle finie. Alors :*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Noter que $E(X^2)$ peut se calculer à l'aide du théorème de transfert.

Démonstration : Par linéarité de l'espérance, $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$. □

Reprenons la variable X égale à la somme des deux dés. On a $E(X^2) = 4 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{2}{36} + 16 \times \frac{3}{36} + 25 \times \frac{4}{36} + 36 \times \frac{5}{36} + 49 \times \frac{6}{36} + 64 \times \frac{5}{36} + 81 \times \frac{4}{36} + 100 \times \frac{3}{36} + 121 \times \frac{2}{36} + 144 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$ et $E(X)^2 = 49$, donc $V(X) = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}415$.

Proposition 8 *Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration :
$V(aX+b) = E((aX+b)^2) - E(aX+b)^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2 = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)2 - 2abE(X) - b^2 = a^2(E(X^2) - E(X)^2) = a^2V(X)$. □

Corollaire 9 *Soit X une variable aléatoire réelle. Si $V(X) \neq 0$ alors la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.*

Démonstration :
Par linéarité de l'espérance $E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{E(X) - E(E(X))}{\sigma(X)} = 0$ et d'après ce qui précède $V\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{V(X - E(X))}{\sigma(X)^2} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$. □

Proposition 10 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Soit X une variable aléatoire réelle finie. Pour tout $\alpha > 0$:*

$$P(|X - E(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ avec $a = \alpha^2$. □

Cette inégalité permet de quantifier (assez grossièrement) le fait que X prend avec une probabilité importante des valeurs relativement proches de son espérance. Ainsi, pour $\alpha = 2\sigma(X)$, on obtient $P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \leqslant \frac{1}{4}$: la probabilité que X soit compris entre $E(X) - 2\sigma(X)$ et $E(X) + 2\sigma(X)$ est supérieure à 0,75.

III Couples de variables aléatoires

1 Couples de variables aléatoires

Définition 6 *Un* **couple de variables aléatoires** *est une variable aléatoire à valeurs dans un produit, i.e. un couple (X, Y) où X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω.*

La **loi de** (X, Y) *est définie par la donnée des $P((X, Y) = (x, y))$, i.e. des $P((X = x) \cap (Y = y))$, qu'on notera $P(X = x, Y = y)$, pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$.*

On dit que la loi de (X, Y) est la **loi conjointe de** X **et** Y *et que les lois de X et de Y sont les* **lois marginales de** (X, Y).

Proposition 11 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies. Alors :*

(i) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$.

(ii) Pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$.

Démonstration : Il suffit d'écrire que l'événement $\{X = x\}$ est la réunion disjointe des $\{X = x, Y = y\}$ pour y dans $Y(\Omega)$. □

Ainsi la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales. En revanche les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Exemple : on lance deux fois une pièce non truquée et on note X le nombre de piles et Y le nombre de faces obtenus. Alors les lois de X, Y et (X, Y) sont données par les tableaux suivants :

x	0	1	2
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

y	0	1	2
$P(Y=y)$	1/4	1/2	1/4

	0	1	2
0	0	0	1/4
1	0	1/2	0
2	1/4	0	0

Si maintenant on note X le nombre de piles obtenus et qu'on prend $Y = X$, alors les lois de X, Y et (X,Y) sont données par les tableaux suivants :

x	0	1	2
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

y	0	1	2
$P(Y=y)$	1/4	1/2	1/4

	0	1	2
0	1/4	0	0
1	0	1/2	0
2	0	0	1/4

Proposition 12 *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur un univers fini Ω et soit $f : X(\Omega)\times Y(\Omega) \to F$ une application. Alors la loi de $f(X,Y)$ est donnée par :*

$$P(f(X,Y)=z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ f(x,y)=z}} P(X=x, Y=y).$$

En particulier, si X et Y sont réelles, les lois de $X+Y$ et de XY s'obtiennent par les formules :

$$P(X+Y=z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=z}} P(X=x, Y=y).$$

$$P(XY=z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ xy=z}} P(X=x, Y=y).$$

Démonstration : Il suffit d'écrire que l'événement $\{f(X,Y)=z\}$ est la réunion disjointe des $\{X=x, Y=y\}$ pour tous les couples $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ tels que $f(x,y)=z$. $\square$

Proposition 13 (Théorème de transfert) *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles sur un univers fini Ω et soit $f : X(\Omega)\times Y(\Omega)\to\mathbb{R}$ une application. Alors l'espérance de $f(X,Y)$ vérifie :*

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} f(x,y)P(X=x,Y=y).$$

Démonstration : Adapter la preuve du théorème de transfert pour une variable. $\square$

Définition 7 *Si $P(Y=y)\neq 0$, la* **loi conditionnelle de** X **sachant** $Y=y$ *est définie par :*

$$P(X=x\,|\,Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$

Plus généralement si A est un événement de probabilité non nulle on peut définir la loi conditionnelle de X sachant A par $P(X=x\,|\,A) = \dfrac{P((X=x)\cap A)}{P(A)}$.

Exercice 1 Soient les variables X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand nombre obtenu en lançant deux dés équilibrés.

1) Déterminer la loi de (X,Y) et en déduire les lois de X et de Y ainsi que leurs espérances et leurs variances.

2) Déterminer la loi de $Y-X$ et son espérance.

3) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ pour $x\in\{1,\dots,6\}$.

2 Variables aléatoires réelles indépendantes

Définition 8 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini (Ω,P). On dit que X et Y sont* **indépendantes** *si, pour toute partie A de $X(\Omega)$ et pour toute partie B de $Y(\Omega)$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants, i.e. :*

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 14 *X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$:*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Démonstration :

Le sens direct est immédiat : il suffit de prendre $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Pour le sens réciproque, il suffit d'écrire l'événement $\{(X,Y) \in A \times B\}$ comme réunion disjointe des événements $\{X = x, Y = y\}$ pour (x,y) dans $A \times B$. Ainsi $P((X,Y) \in A \times B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X = x, Y = y) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X = x)P(Y = y) = (\sum_{x \in A} P(X = x))(\sum_{y \in B} P(Y = y)) = P(X \in A)P(Y \in B)$. □

Proposition 15 *Si X et Y sont indépendantes, alors :*

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$.

(ii) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

La réciproque est fausse.

Démonstration :

(i) $E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) = (\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x))(\sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y)) = E(X)E(Y)$.

(ii) $V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)+E(Y))^2 = E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 = V(X) + V(Y)$. □

Proposition 16 *Si X et Y sont indépendantes et que f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

Démonstration : Soient $u \in f(X(\Omega))$ et $v \in g(Y(\Omega))$. Alors $P(f(X) = u, g(Y) = v) = \sum_{x \mid f(x)=u} \sum_{y \mid g(y)=v} P(X = x, Y = y) = \sum_{x \mid f(x)=u} \sum_{y \mid g(y)=v} P(X = x)P(Y = y) = (\sum_{x \mid f(x)=u} P(X = x))(\sum_{y \mid g(y)=v} P(Y = y)) = P(f(X) = u)P(g(Y) = v)$. □

Définition 9 *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur un univers fini Ω. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont* **indépendantes** *si, pour tout $(A_1, \dots, A_n)$ dans $\mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont indépendants.*

Proposition 17 *Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega))$:*

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n).$$

Démonstration :

Le sens direct est immédiat.

Pour le sens réciproque, on montre d'abord que $P(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_p} = x_{i_p}) = P(X_{i_1} = x_{i_1}) \dots P(X_{i_p} = x_{i_p})$ pour tout $(i_1, \dots, i_p) \subset \{1, \dots, n\}$ en écrivant l'événement $(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_p} = x_{i_p})$ comme réunion disjointe des $(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_p} = x_{i_p}, X_{i_{p+1}} = x_{i_{p+1}}, \dots, X_{i_n} = x_{i_n})$ où $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ avec $x_{i_{p+1}} \in X_{i_{p+1}}(\Omega), \dots, x_{i_n} \in X_{i_n}(\Omega)$.

Ensuite on montre que $P(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_p} \in A_{i_p}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \dots P(X_{i_p} \in A_{i_p})$ pour tout $(i_1, \dots, i_p) \subset \{1, \dots, n\}$ en écrivant l'événement $(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_p} \in A_{i_p})$ comme réunion disjointe d'événements de la forme précédente. □

Proposition 18 *(Lemme des coalitions) Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ aussi.*

Démonstration : Admis. □

Le lemme des coalitions reste valable pour plus de deux coalitions.

3 Covariance

Définition 10 *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini. On définit la* **covariance** *de X et Y par :*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

On dit que X et Y sont **décorrélées** si leur covariance est nulle.

Proposition 19 $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Démonstration : Il suffit de développer $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ et d'utiliser la linéarité de l'espérance. □

Proposition 20 *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration : Conséquence immédiate de la proposition 15. $\square$

La réciproque est fausse.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ dont la loi conjointe est donnée par $P(X = i, Y = j) = 0$ si $|i| = |j|$ et $1/4$ sinon. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 21 *Soient X, Y, Z des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini et $a, b \in \mathbb{R}$.*

(i) $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.

(ii) (Symétrie) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

(iii) (Bilinéarité) $\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\,\mathrm{Cov}(X, Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y, Z)$ *et* $\mathrm{Cov}(Z, aX + bY) = a\,\mathrm{Cov}(Z, X) + b\,\mathrm{Cov}(Z, Y)$.

(iv) $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y) + b^2V(Y)$.

Démonstration : Faire les calculs. $\square$

IV Lois usuelles

1 Loi uniforme

Définition 11 *Soit X une variable aléatoire. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. On dit que X* **suit la loi uniforme sur** $\{x_1, \ldots, x_n\}$, *et on note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et que $P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Par exemple, si X désigne le résultat du lancer d'un dé bien équilibré, alors X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Proposition 22 *Si X suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.*

Démonstration :
On a $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$ et $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^2-1}{12}$. $\square$

2 Loi de Bernoulli

Définition 12 *Soit X une variable aléatoire. Soit $p \in [0, 1]$. On dit que X* **suit la loi de Bernoulli de paramètre** *p, et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$, que $P(X = 0) = 1 - p$ et que $P(X = 1) = p$.*

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues (succès ou échec). La variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit alors la loi de Bernoulli de paramètre p. Par exemple, si X désigne le résultat du lancer d'une pièce bien équilibrée (1 pour pile, 0 pour face), alors X suit la loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

Proposition 23 *Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.*

Démonstration :
$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) = p$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \times P(X = 1) + 0^2 \times P(X = 0) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$. $\square$

Remarque : Pour tout $A \in \Omega$, la fonction indicatrice de A suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

3 Loi binomiale

Définition 13 *Soit X une variable aléatoire. Soit $p \in [0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X* **suit la loi binomiale de paramètres** *n* **et** *p, et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$ et que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Proposition 24 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.*

Un **schéma de Bernoulli** de paramètre n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Si on appelle $X_1, \ldots, X_n$ les variables à valeurs dans $\{0, 1\}$ traduisant le succès ou l'échec de chacune de ces épreuves, alors leur somme $X = X_1 + \ldots + X_n$ est égale au nombre de succès obtenus, et la proposition affirme que X suit la loi binomiale de paramètres n et p. Par exemple, si on lance n fois une pièce bien équilibrée, la variable égale au nombre de piles obtenus suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Démonstration :

La variable $X = X_1 + \ldots + X_n$ est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $X = k$ si et seulement si k des variables X_i valent 1 et que les $n - k$ autres valent 0. Or les X_i sont indépendantes donc la probabilité d'un tel événement est $p^k(1-p)^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k variables parmi n, donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. $\square$

Proposition 25 *Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.*

Démonstration :

Avec la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, on a $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k} = np(p+1-p)^{n-1} = np$.

De même, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, donc $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k(1-p)^{n-k} + np = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2}(1-p)^{n-k-2} + np = n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k(1-p)^{n-2-k} + np = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} + np = n(n-1)p^2 + np$ et donc $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p)$.

On peut aussi montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = np$ et que $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2$ en dérivant deux fois les deux membres de l'égalité $(px + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k x^k (1-p)^{n-k}$ et en prenant $x = 1$.

Enfin, on peut obtenir le résultat instantanément à partir de la proposition précédente : pour tout i on a $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$, donc par linéarité de l'espérance on a $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = np$, et puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on a $V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = np(1-p)$. $\square$