Devoir n°31 (non surveillé)

Partie I

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$. On pose également $P_0 = 1$.

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $P_k(p) \in \mathbb{Z}$. On distinguera selon que $0 \leqslant p \leqslant k-1$, $p \geqslant k$ ou $p < 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

3) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$,

(ii) $P(0), P(1), \dots, P(n) \in \mathbb{Z}$,

(iii) $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Indication : pour $(ii) \Rightarrow (iii)$ on pourra raisonner par récurrence forte.

Partie II

Soit Δ l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ définie par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par Δ.

2) Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\Delta$. Montrer que $P(k) = P(0)$ pour tout entier naturel k. En déduire que $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{C}_0[X]$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ induit par Δ.

a) Quel est le noyau de Δ_n ? Quel est son rang ?

b) Montrer que $\operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

c) Écrire la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

d) Écrire la matrice de Δ_n dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. En déduire à nouveau son rang, son noyau et son image.

4) Déduire des questions précédentes que, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$ et $P(0) = 0$.

Partie III

On note $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^p = \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (p fois).

1) Soient $k, p \in \mathbb{N}$. Calculer $\Delta^p(P_k)$ (on distinguera selon que $p \leqslant k$ ou $p > k$). En déduire $\Delta^p(P_k)(0)$.

2) En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) P_k$.

3) a) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer l'unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$ et $P(0) = 0$ en fonction des nombres $\Delta^k(Q)(0)$ et des polynômes P_k.

b) Application : déterminer P lorsque $Q = X^2$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.